Abteilung für Mathematische Optimierung
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor Fekete

SS 2001

Mathematische Optimierung II

Übung 7 vom 21.06.2001

(Abgabe bis zum 28.06.2001)

Aufgabe 20 (Turmpackungen und Streifenüberdeckungen): Eine endliche zusammenhängende Teilmenge aus Einheitsquadraten ("Pixeln") des unendlichen Schachbrettes ist ein *Polyomino.* Ein *Streifen* innerhalb eines Polyominos ist eine zusammenhängende Teilmenge von Pixeln, die alle die gleiche x-Koordinate haben ("senkrechter Streifen") oder die gleiche y-Koordinate haben ("waagerechter Streifen"). Eine *Turmpackung* ist eine Menge von Pixeln, so dass keine zwei Pixel zum selben Streifen gehören. (Das entspricht also einer Menge von Türmen auf dem vom Polyomino bestimmten Brett, so dass keine zwei Türme sich gegenseitig schlagen können.) Eine *Streifenüberdeckung* ist eine Menge von Streifen, so dass jeder Pixel des Polyominos in mindestens einem Streifen enthalten ist.

(a) Zeigen Sie: Für jede Turmpackung T uns jede Streifenüberdeckung S gilt $|T| \leq |S|$.

(b) Bestimmen Sie eine maximale Turmpackung und eine minimale Streifenüberdeckung für das in Abbildung 1 gezeigte Polyomino. Warum gilt jeweils Optimalität?

(c) Zeigen Sie: Für eine maximale Turmpackung T^* und eine minimale Streifenüberdeckung S^* gilt $|T| = |S|$.

(d) Folgern Sie: Minimale Streifenüberdeckung und maximale Turmpackung in einem Polyomino können in polynomialer Zeit berechnet werden.

(Tipp zu (c): Betrachten Sie einen durch Streifen maximaler Länge und Pixel gegebenen geeigneten bipartiten Graphen und wenden Sie den Satz von König an!)

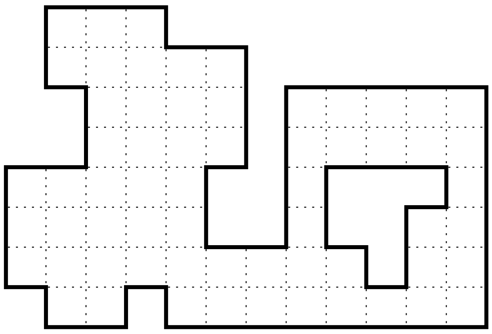

Abbildung 1: Ein Polyomino

(20 Punkte)

Aufgabe 21 (Hex): Im Spiel Hex setzen zwei Spieler ("Schwarz" und "Weiss") abwechselnd jeweils einen Stein ihrer Farbe auf ein freies sechseckiges Feld eines Spielbrettes, das zum Beispiel aussieht wie in Abbildung 2. Jeder Spieler hat zwei gegenüberliegende "Ufer". Alle gesetzten Steine bleiben stehen und können nicht mehr entfernt werden. Ziel ist es, einen zusammenhängenden Pfad zwischen den eigenen Ufern zu bilden.

Zeigen Sie:

(a) Wenn ein Spieler einen Pfad gebildet hat, kann dies der andere Spieler nicht mehr, man kann das Spiel also getrost beenden.

(b) Es kann kein Unentschieden geben, einer der Spieler gewinnt also auf jeden Fall.

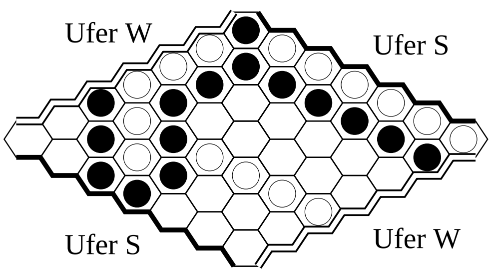

Abbildung 2: Eine Spielsituation bei Hex: Spieler Schwarz gewinnt

(20 Punkte)

Aufgabe 22 (Ein Min-Cost-Flow-Problem): Betrachten Sie das in Abbildung 3 gezeigte Min-Cost-Flow-Problem. Entscheiden Sie, ob der gezeigte Flussvektor x optimal ist. (Die Zahlen an den Kanten stehen für Kosten, Kapazität, Fluss, die kursiven Zahlen an den Knoten für die Nachfrage.) Falls der Fluss optimal ist, bestimmen Sie einen Vektor y, der die Optimalität beweist.

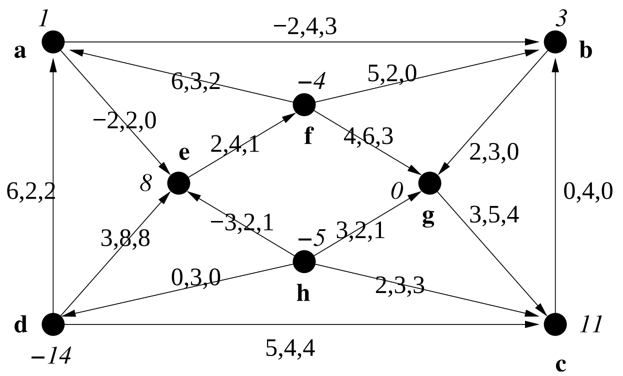

Abbildung 3: Ein Min-Cost-Flow Problem mit einem Fluss

(20 Punkte)