Übung 3 vom 10.05.2001

(Abgabe bis zum 17.05.2001)

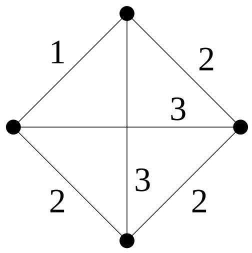

Abbildung 1: Ein kleiner gewichteter Graph

Aufgabe 6 (Ein LP für minimale aufspannende Bäume – noch einmal mit Gefühl!):

Betrachten Sie das folgende LP:

$$\begin{array}{cccl} \min & w^T x & & \\ \sum_{e\in\gamma(S)} x_e & \leq & |S|-1 & \text{für} \quad S \subset V, \emptyset \neq S \neq V \\ \sum_{e\in E} x_e & = & |V|-1 & \\ x & \geq & 0 & \\ x & \in & \Re^E & \end{array}$$

Zeigen Sie:

(a) Der charakteristische Kantenvektor für jeden aufspannenden Baum T ist zulässig für dieses LP.

(b) Formulieren Sie das duale LP.
(Am einfachsten geht das, indem Sie in den S-Bedingungen Schlupfvariable einführen. Die Variablen im dualen LP seien mit y_S, für $S \subseteq V$ bezeichnet.)

(c) Argumentieren Sie: Für jeden zusammenhängenden gewichteten Graphen ist die maximale Kantenlänge $w_{\max}$ in einem minimalen aufspannenden Baum wohldefiniert.

(d) Zeigen Sie, dass es eine Optimallösung für das duale LP gibt, bei der $y_V = c_{\max}$ ist, $y_S < 0$ nur für bestimmte zweielementige Teilmengen $S \subseteq V$, und $y_S = 0$ für alle anderen Teilmengen.

(d) Geben Sie explizit das LP und das duale LP für den Graphen in Abbildung 1 an sowie ein Paar von Optimallösungen.

(20 Punkte)

Aufgabe 9 (Ein LP für Matchings):
Betrachten Sie das folgende LP:

$$\begin{array}{ccll}
\min & w^T x & & \\
\sum_{e\in\delta(v)} x_e & \geq & 1 & \text{für} \quad S \subset V, \emptyset \neq S \neq V \\
x & \geq & 0 & \\
x & \in & \Re^E &
\end{array}$$

Zeigen Sie:

(a) Der charakteristische Kantenvektor für jedes Matching M ist zulässig für dieses LP.

(b) Formulieren Sie das duale LP.

(c) Geben Sie explizit das LP und das duale LP für den Graphen in Abbildung 1 an sowie ein Paar von Optimallösungen.

(d) Betrachten Sie nun den Graphen in Abbildung 2. Zeigen Sie: Es gibt eine zulässige Lösung für das LP, deren Wert wesentlich kleiner ist als der Wert eines optimalen Matchings.

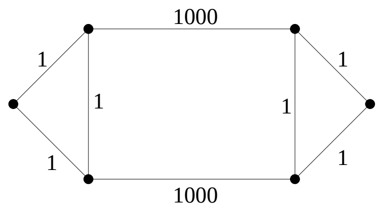

Abbildung 2: Ein gewichteter Graph mit kleinem fraktionalem Matching

(20 Punkte)

Aufgabe 10 (Ein LP für das Traveling-Salesman-Problem):
Betrachten Sie das folgende LP:

$$\begin{array}{ccll}
\min & w^T x & & \\
\sum_{e\in\delta(v)} x_e & = & 2 & \text{für} \quad v \in V \\
\sum_{e\in\delta(S)} x_e & \geq & 2 & \text{für} \quad S \subset V, \emptyset \neq S \neq V \\
x & \geq & 0 & \\
x & \in & \Re^E &
\end{array}$$

Zeigen Sie:

(a) Der charakteristische Kantenvektor für jede Rundreise erfüllt dieses LP.

(b) Jede ganzzahlige zulässige Lösung des LPs entspricht eines Rundreise.
(Achtung! Man muss auch argumentieren, dass keine ganzen Zahlen außer 0 und 1 auftauchen können.)

(c) Betrachten Sie nun den Graphen in Abbildung 3. (Dieser Graph hat $3k$ Knoten, alle Kanten haben Länge 1. Wege zwischen nicht verbundenen Knoten kosten die Summe der benutzten Kanten.) Zeigen Sie: Eine optimale Rundreise durch den Graphen hat mindestens die Länge $4k - 2$.

(d) Andererseits gibt es eine zulässige LP-Lösung mit Zielfunktionswert $3k$.
(Tipp: Setzen Sie auf den Dreieckskanten $x_e = 1/2$.)

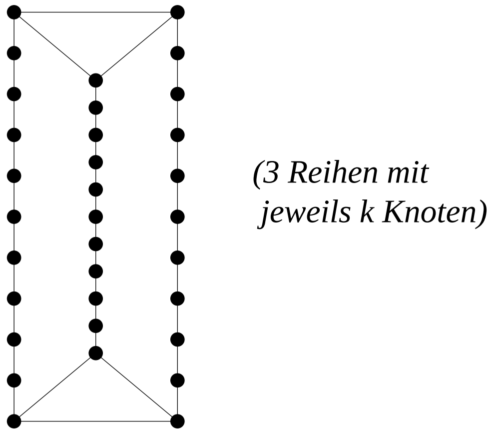

Abbildung 3: Ein gewichteter Graph für den eine LP-Lösung besser ist die kürzeste Tour

(20 Punkte)