Abteilung für Mathematische Optimierung
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor Fekete
Dr. Laura Heinrich-Litan

WS 2004/05

Logik für Informatiker
Übung 11 vom 27.01.05

(Abgabe bis zum 03.02.2005, 12:00 durch Einwurf in den Übungskasten im vierten Stock des Forumsgebäudes)

Aufgabe 1 (Ackermann-Funktion):

Die *Ackermann-Funktion* ist folgendermaßen definiert:

$$A(m,n) = \begin{cases} n+1 & \text{falls } m = 0, \\ A(m-1,1) & \text{falls } m > 0, n = 0, \\ A(m-1, A(m,n-1)) & \text{falls } m > 0, n > 0. \end{cases}$$

Sie ist ein beliebtes Beispiel für besonders schnelles Wachstum einer rekursiv definierten Funktion.

1. Beweise: Die Ackermann-Funktion ist wohldefiniert, d.h., die obige Rekursionsbeziehung endet irgendwann.

   (Tipp: Zwei verschachtelte Rekursionen über m und n.)

2. Zeige:

   (a) $A(1,n) > n+1$.

   (b) $A(2,n) > 2n$.

   (c) $A(3,n) > 2^n$.

   (d) $A(4,n) > 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}$, ein Turm der Höhe n.

   (e) $A(5,4) > 10^{10000}$.

(10+25 Punkte)

Aufgabe 2 (Collatz-Funktion, Ulams Problem):

Die Funktion $c : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei gegeben durch

$$c(x) \;=\; \begin{cases} x/2 & \text{falls } x \text{ gerade} \\ 3x+1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Betrachte die Menge

$$M \;=\; \{x \in \mathbb{N} \mid \text{es gibt } i \in \mathbb{N}, \text{ so dass } c^i(x) = 1\},$$

wobei $c^0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die Funktion c ist und $c^i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ für $i > 0$ durch $c^i(x) := c\,(c^{i-1}(x))$ definiert ist.

Beispiel: $3 \in M$, wegen $c^0(3) = 3, c^1(3) = 10, c^2(3) = 5, c^3(3) = 16, \ldots, c^7(3) = 1$.

a) Zeige, dass M rekursiv aufzählbar ist.

b) Sei $w(x) = \min\{i \in \mathbb{N} \mid c^i(x) = 1\}$ für $x \in M$. Welche Zahl $x \in M$ zwischen 1 und 100 hat den größten Wert $w(x)$? Wie lautet dieser Wert und wie lautet die dazugehörige Folge $c^0(x), \ldots, c^{w(x)}(x)$?

(15+10 Punkte)