Abteilung für Mathematische Optimierung
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor Fekete
Dr. Laura Heinrich-Litan
Alexander Kröller

WS 2004/05

Lineare Optimierung
Übung 9 vom 11.01.05

(Abgabe bis zum 19.01.2005, 9:45 durch Einwurf in den Übungskasten im vierten Stock des Forumsgebäudes)

Aufgabe 1 (Kegel – einmal so, einmal so!):

Betrachte die Menge $X = P(A, 0) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - x_3 \leq 0, x_1 - x_2 - x_3 \leq 0, -x_1 + x_2 - x_3 \leq 0, -x_1 - x_2 - x_3 \leq 0\}$.

(a) Zeige "zu Fuß": $\forall x, y \in X, \forall \mu, \lambda \geq 0 : \mu x + \lambda y \in X$, d.h., X ist ein Kegel.

(b) Nach Definition ist X polyedrisch. Gib eine Menge $S = \{b_1, \ldots, b_m\}$ an, so dass $\mathit{cone}(S) = X$ ist.

(c) Sei Y:=$\{a_1, \ldots, a_m\}$ die Menge von Zeilenvektoren der Matrix A und B die aus den Zeilenvektoren $\{b_1, \ldots, b_m\}$ gebildete Matrix. Verifiziere für das genannte Beispiel: Es gilt tatsächlich wie in der Vorlesung bewiesen $P(B, 0) = \mathit{cone}(Y)$.

(5+5+10 Punkte)

Aufgabe 2 (Kegelbasen):

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Kegel. $S \subseteq X$ heißt Erzeugendensystem für X, falls $\mathit{cone}(S) = X$. Ist S minimal (bezüglich Inklusion), dann nennt man S Kegelbasis.

Zeige:

a) Für den $\mathbb{R}^2$ gibt es Kegelbasen unterschiedlicher Kardinalität.

b) Eine Menge S ist genau dann Kegelbasis für einen Kegel X, wenn gilt $\mathit{cone}(S) = X$ und $\forall s \in S : s \notin \mathit{cone}(S \setminus \{s\})$.

c) Bereits im $\mathbb{R}^2$ gibt es Kegel, die nicht polyedrisch sind. Belege diese Aussage mit einem Beispiel. Besitzt Dein Beispiel eine Basis?

(3+8+4 Punkte)

Aufgabe 3 (Polare Kegel):

Der *polare Kegel* einer Menge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ beschreibt alle Ungleichungen der Form $a^T x \leq 0$, die für S gültig sind. Er ist definiert als

$$S^\circ := \{a \in \mathbb{R}^n \mid a^T x \leq 0 \; \forall x \in S\}.$$

Im folgenden seien $S, T \subseteq \mathbb{R}^n$. Zeige:

a) S° ist ein Kegel.

b) $S \subseteq T \Rightarrow T^\circ \subseteq S^\circ$.

c) $S \subseteq S^{\circ\circ}$.

d) $cone\,(S^\circ) = S^\circ$.

e) $(cone\,(S))^\circ = S^\circ$.

f) $S^\circ = S^{\circ\circ\circ}$.

g) Für jede Matrix A gilt: $cone\,(A) = P(A^T, 0)^\circ$, wobei $cone\,(A)$ die konische Hülle der Spaltenvektoren von A ist. (Tipp: Verwende das Farkas-Lemma.)

(3+2+3+2+4+3+8 Punkte)