Abteilung für Mathematische Optimierung
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor Fekete
Dr. Laura Heinrich-Litan

WS 2004/05

Lineare Optimierung
Übung 6 vom 07.12.04

(Abgabe bis zum 15.12.2004, 9:45 durch Einwurf in den Übungskasten im vierten Stock des Forumsgebäudes)

Aufgabe 1 (Strategie von Cunningham):

Betrachten Sie das Transportnetzwerk in Abbildung 1 und das zugehörige Versandproblem. Die Zahlen an den Kanten stehen für Kosten c_{ij} und die Zahlen an den Knoten für Bilanzen.

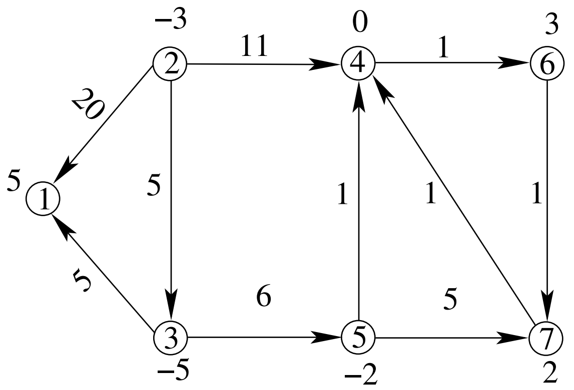

Abbildung 1: Ein Transportnetzwerk

Lösen Sie dieses Versandproblem mit dem Netzwerk-Simplexverfahren. Starten Sie dabei mit folgender Basislösung:

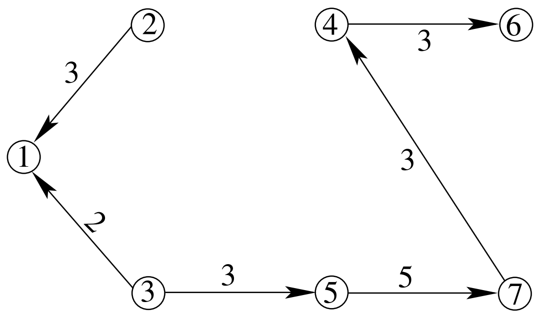

Abbildung 2: Die erste Basislösung

Zur Bildung von neuen Basislösungen wählen Sie in jeder Iteration eine Kante (i, j) mit maximalem, positivem Wert $y_j - y_i - c_{ij}$. Ausserdem benutzen Sie die Strategie von Cunningham zur Vermeidung von Zykeln und wählen Sie dabei den Knoten 6 als Wurzel. Bei der Berechnung der y_i-Werte setzen Sie im ersten Schritt y_7 auf den Wert 0. In jedem weiteren Iterationsschritt aktualisieren Sie die y_i-Werte mit Hilfe der in der grossen Übung vorgestellten Update-Formel.

(20 Punkte)

Aufgabe 2 (Stark zulässige Bäume):

Zu einem Versandproblem $\min\{cx \mid Ax = b, x \geq 0\}$ auf einem gerichteten Graphen G mit Wurzel r definieren wir ein ϵ-gestörtes Versandproblem $\min\{cx \mid Ax = b', x \geq 0\}$ mit $b'_v = b_v + \epsilon$ für jeden Knoten $v \neq r$ und $b'_r = b_r - (n-1)\epsilon$, wobei n die Anzahl der Knoten von G ist.

Zeigen Sie, dass für ein hinreichend kleines $\epsilon > 0$ jeder aufspannende Baum T in G zulässig für b' ist, genau dann wenn T stark zulässig für b ist.

(Tipp: Betrachten Sie eine Basislösung x zum ursprünglichen Versandproblem und eine Basislösung x' zum ϵ-gestörten Versandproblem. Falls x und x' denselben zugehörigen Baum T haben, wie sieht x' in Abhängigkeit von x und ϵ aus?)

(20 Punkte)

Aufgabe 3 (Regel von Bland):

Lösen Sie das folgende lineare Programm

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\max & x_1 & - & 7x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & & \\
\text{unter} & x_1 & - & 11x_2 & - & 5x_3 & + & 18x_4 & \leq & 0 \\
& x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & \leq & 0 \\
& x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

mit dem Simplexverfahren, indem Sie die Pivotauswahlregel von Bland benutzen.

(20 Punkte)