Abteilung für Mathematische Optimierung
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor Fekete
Dr. Laura Heinrich-Litan

WS 2004/05

Lineare Optimierung
Übung 4 vom 23.11.04

(Abgabe bis zum 01.12.2004, 9:45 durch Einwurf in den Übungskasten im vierten Stock des Forumsgebäudes)

Aufgabe 1 (Versandprobleme mit Bilanz):

Betrachte ein Transportnetzwerk (G, c, b) mit der Inzidenzmatrix A des dazugehörigen gerichteten Graphen $G = (V, E)$, $V = \{1, \dots, n\}$, mit Kosten c_{ij} an Kanten $(i, j) \in E$, Bilanzen b_i an den Knoten $i \in V$ und mit der Bilanzsumme $\sum_{i=1}^{n} b_i \neq 0$. In diesem Falle soll soviel Nachfrage und Angebot wie möglich transportiert werden – also der kleinere der beiden Beträge befriedigt werden.

Zeige: Für jedes solche Problem gibt es ein äquivalentes Problem auf einem Graphen G' mit Inzidenzmatrix A', Kosten c' und Bilanzen b'_i, für die $\sum_{i=1}^{n'} b'_i = 0$ gilt. (Äquivalent heißt in diesem Falle: Aus einer Lösung von $\min\{c'x' \mid A'x' = b, x' \geq 0\}$ lässt sich immer unmittelbar eine Lösung des ursprünglichen Problems ablesen – und umgekehrt!)

Daher reicht es also, eine Lösungsmethode für den Fall zu erarbeiten, dass Gesamtangebot und Gesamtnachfrage gleich sind.

(25 Punkte)

Aufgabe 2 (Kreisfreie Graphen):

Zeige, dass ein kreisfreier Graph mit n Knoten und $n - k$ Kanten $(1 \leq k \leq n)$ aus k disjunkten Bäumen besteht.

(10 Punkte)

Aufgabe 3 (Inzidenzmatrizen):

Sei A die $n \times m$ Inzidenzmatrix eines gerichteten Graphen $D = (V, E)$.

a) Sei $K = (e_1, e_2, \dots, e_k)$ ein Kreis im ungerichteten Graphen G_D zu D. Betrachte die zum Kreis K gehörigen Spalten a_{e_i} in der Inzidenzmatrix A. Zeige, dass diese Spalten a_{e_i}, $i = 1, \dots, k$ linear abhängig sind.

b) Angenommen, dass der ungerichteter Graph G_D zu D ein einfacher Graph ist. Betrachte die $n \times n$ Matrix $M = (m_{ij})$ mit $M := AA^t$ und zeige:

$$m_{ij} = \begin{cases} d(i) & \text{falls } i = j \\ -1 & \text{falls } i \text{ und } j \text{ adjazent} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

wobei $d(i)$ die Anzahl der mit dem i-ten Knoten inzidenten Kanten ist.

(10+15 Punkte)