**Abteilung für Mathematische Optimierung**
**TU Braunschweig**

Prof. Dr. Sándor Fekete
Dr. Laura Heinrich-Litan

**WS 2003/04**

# Lineare Optimierung
# Übung 12 vom 21.01.04

Abgabe der Aufgaben bis 11:00 Uhr am **Mittwoch, 28.01.04.** durch Einwurf in den Übungskasten im vierten Stock des Forumsgebäudes

### Aufgabe 1 (Duale Simplexmethode und Gomory-Schnittebenen):

Betrachte das ganzzahlige Programm

$$\begin{array}{lrcrcr}
\max & & & x_2 & & \\
\text{unter} & -3x_1 & + & 4x_2 & \leq & 4 \\
 & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 11 \\
 & 2x_1 & - & x_2 & \leq & 5 \\
 & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \\
 & x_1, & & x_2 & \in & \mathbb{Z}\,.
\end{array}$$

Zeichne ein Bild, um die erste Frage zu beantworten:

(a) Was ist der Optimalwert der linearen Relaxierung? Was ist der Optimalwert des ganzzahligen Problems ? Was ist die konvexe Hülle aller zulässigen Lösungen des ganzzahligen Problems ?

(b) Hier das optimale Simplextableau zur LP-Relaxierung:

| | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 0 | $-1/9$ | $2/9$ | 0 | 2 |
| $x_2$ | 0 | 1 | $1/6$ | $1/6$ | 0 | $5/2$ |
| $s_3$ | 0 | 0 | $7/18$ | $-5/18$ | 1 | $7/2$ |
| | 0 | 0 | $-1/6$ | $-1/6$ | 0 | $-5/2$ |

(Dabei bezeichnet $s_i$ die Schlupfvariable zur $i$-ten Ungleichung.) Gib eine Gomory-Schnittebene an, wobei die erste Zeile des Tableaus verwendet werden soll, für die sich ein sinnvoller Schnitt ergibt. Stelle den Schnitt graphisch dar.

Füge die neue Restriktion zum oben angegeben LP hinzu und löse das neue lineare Programm mit der dualen Simplexmethode. (Benutze dabei folgende Pivotregel: kommen zwei verschiedene Spalten zum Pivotisieren in Frage, dann wird die erste von links gewählt.) Finde auf dieser Weise den Optimalwert des ganzzahligen Problems mit insgesamt zwei Gomory-Schnittebenen. (Dabei reicht es im zweiten Schritt zu begründen, dass die ursprünglichen Variablen $x_1$ und $x_2$ das ganzzahlige Optimum annehmen; der Rest des Tableaus auf den verschiedenen Schlupfvariablen braucht man dafür nicht mehr auszurechnen.)

**(5+15 Punkte)**

**Aufgabe 2 (Dualität):**

a) Das Problem min $c^T x$ unter $Ax = b$, $x \geq 0$ habe einen endlichen Optimalwert. Zeige, dass das Problem min $c^T x$ unter $Ax = b'$, $x \geq 0$ für alle $b'$ nicht unbeschränkt ist.

b) Sei $A = A^T$. Zeige, dass jede zulässige Lösung von min $c^T x$ unter $Ax = c$ optimal ist.

**(5+5 Punkte)**

**Aufgabe 3 (LP-Formulierung eines Optimierungsproblem):**

Formuliere das folgende Optimierungsproblem als LP : Gegeben $n$ Punkte $(x_i, y_i)$ in der Ebene. Gesucht ist eine Gerade, die das Maximum der vertikalen Abstände zu den Punkten minimiert. Dualisiere das Problem.

**(10 Punkte)**

**Aufgabe 4 (Ein Versandproblem):**

Betrachte das Transportnetzwerk in Abbildung 1 und das zugehörige Versandproblem. Die Zahlen an den Kanten stehen für Kosten $c_{ij}$ und die Zahlen an den Knoten für Bilanzen.

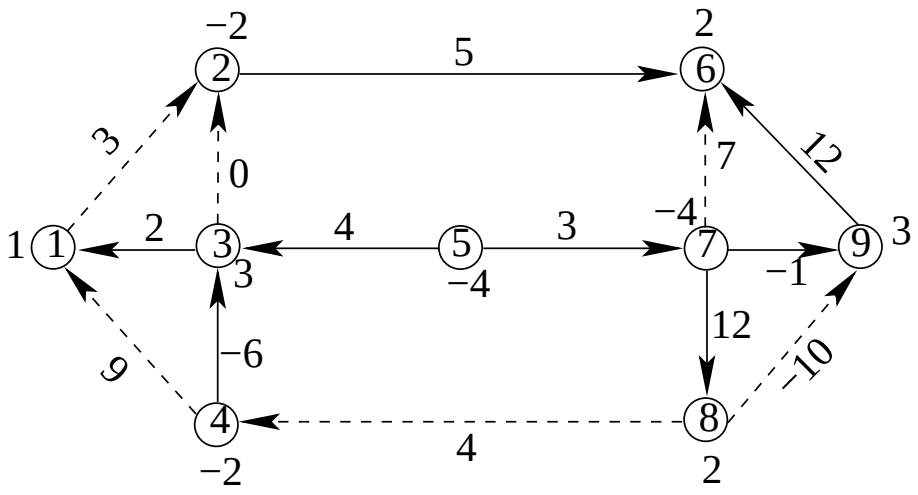


Abbildung 1: Ein Transportnetzwerk

Löse dieses Versandproblem mit dem Netzwerk-Simplexverfahren. Die erste Basislösung ist durch die fett angezeichneten Kanten festgelegt. Zur Bildung der neuen Basislösung benutze die Strategie von Cunningham zur Vermeidung von Zykeln.

**(20 Punkte)**