Abteilung für Mathematische Optimierung
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor Fekete
Dr. Laura Heinrich-Litan

WS 2003/04

Lineare Optimierung
Übung 10 vom 07.01.04

Abgabe der Aufgaben bis 11:00 Uhr am **Mittwoch, 14.01.04.** durch Einwurf in den Übungskasten im vierten Stock des Forumsgebäudes

Aufgabe 1 (Turmpackungen und Matching):

Eine endliche zusammenhängende Teilmenge aus Einheitsquadraten ("Pixeln") des unendlichen Schachbrettes ist ein *Polyomino*. Ein *Streifen* innerhalb eines Polyominos ist eine zusammenhängende Teilmenge von Pixeln, die alle die gleiche x-Koordinate haben ("senkrechter Streifen") oder die gleiche y-Koordinate haben ("waagerechter Streifen"). Eine *Turmpackung* ist eine Menge von Pixeln, so dass keine zwei Pixel zum selben Streifen gehören. (Das entspricht also einer Menge von Türmen auf dem vom Polyomino bestimmten Brett, so dass keine zwei Türme sich gegenseitig schlagen können.) Eine *Streifenüberdeckung* ist eine Menge von Streifen, so dass jeder Pixel des Polyominos in mindestens einem Streifen enthalten ist.

(a) Zeige: Für jede Turmpackung und jede Streifenüberdeckung S gilt $|T| \leq |S|$.

b) Bestimme eine maximale Turmpackung und eine minimale Streifenüberdeckung für das in Abbildung 1 gezeigte Polyomino. Warum gilt jeweils Optimalität?

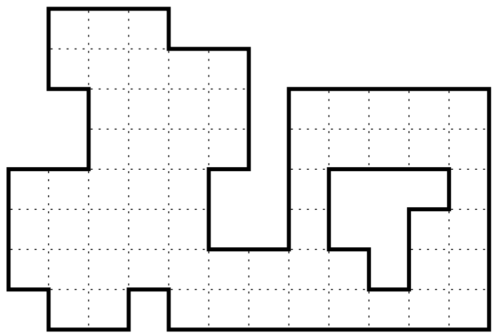

Abbildung 1: Ein Polyomino

(c) Reduziere das Problem, eine maximale Turmpackung in einem Polyomino B zu finden, auf ein Matching-Problem. (D.h., formuliere es als ein Matching-Problem in einem geeigneten bipartiten Graphen G_B, in dem die Streifen maximaler Länge und die Pixel repräsentiert sind.)

(d) Was entspricht im Polyomino B einem Vertex Cover im Graph G_B? Folgere: Für eine maximale Turmpackung T^* und eine minimale Streifenüberdeckung S^* gilt $|T^*| = |S^*|$.

(25 Punkte)

Aufgabe 2 (CLIQUE und INDEPENDENT SET):

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Eine *Clique* in G ist eine Menge $K \subseteq V$ paarweise verbundener Knoten, d.h. für $v, w \in K$ gilt $\{v, w\} \in E$. Eine *unabhängige Menge* in G ist eine Menge $U \subseteq V$ paarweise nicht verbundener Knoten, d.h. für $v, w \in U$ gilt $\{v, w\} \notin E$.

Das Problem Clique besteht darin, für einen Graphen $G = (V, E)$ und eine Zahl $0 < k \leq |V|$ zu entscheiden, ob G eine Clique K mit $|K| \geq k$ hat.

Das Problem Independent Set besteht darin, für einen Graphen $G = (V, E)$ und eine Zahl $0 < k \leq |V|$ zu entscheiden, ob G eine unabhängige Menge U mit $|U| \geq k$ hat.

Beweise folgende Aussagen unter Ausnutzung von geeigneten Reduktionen vom Problem Vertex Cover:

(a) Clique ist NP-vollständig.

b) Independent Set ist NP-vollständig.

(10+10 Punkte)

Aufgabe 3 (Ganzzahlige Lineare Programmierung):

Betrachte folgendes ganzzahliges lineares Programmierungsproblem (ILP): Gegeben eine ganzzahlige $m \times n-$Matrix $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ und ein ganzzahliger Vektor $b \in \mathbb{Z}^m$, finde einen ganzzahligen Vektor $x \in \mathbb{Z}^n$ mit $Ax \geq b$.

Zeige, dass dieses Problem NP-schwer ist: Sat und damit jedes Problem aus NP ist polynomiell reduzierbar auf ILP.

(Es ist also hier *nicht* zu zeigen, dass ILP zu NP gehört.)

(15 Punkte)