

Lineare Optimierung Übung 8 vom 09.12.03

Abgabe der Aufgaben bis 11:00 Uhr am **Mittwoch, 17.12.03.** durch Einwurf in den Übungskasten im vierten Stock des Forumsgebäudes

Aufgabe 1 (Gomory-Chvátal-Cuts):

- a) Sei P die konvexe Hülle der Punkte $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(\frac{1}{2}, 3)$. Gib ein (endliches) System von linearen Ungleichungen an, welches das Polytop P' definiert, wobei P' der Schnitt von P mit allen Gomory-Chvátal-Cuts zu P ist.
- b) Sei $k \geq 3$ eine natürliche Zahl und P die konvexe Hülle der Punkte $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(\frac{1}{2}, k)$. Zeige, dass der Chvátal-Rang von P mindestens k ist.
- (Der Chvátal-Rang von P wurde in der großen Übung eingeführt und ist die kleinste Zahl t mit $P^{(t)} = P_I$, wobei P_I die ganzzahlige Hülle des Polytops P ist, $P^{(0)} = P$ und $P^{(t+1)} = (P^{(t)})'$.)

(10+15 Punkte)

Aufgabe 2 (Unimodulare Matrizen und Ganzzahligkeit):

Eine Matrix A heißt *total unimodular*, wenn die Determinante jeder quadratischen Untermatrix von A einen Wert -1, 0 oder 1 hat.

- (a) Gegeben sei folgende 3×3 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ist die Matrix A total unimodular? Begründe die Aussage.

- (b) Gegeben sei die Matrix A aus Aufgabe 2(a). Zeige, dass für alle ganzzahligen Vektoren $b \in \mathbb{R}^3$, für die $P(b) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = b\}$ nicht leer ist, alle Ecken von $P(b)$ ganzzahlig sind.
- (c) Seien b und c ganzzahlige Vektoren und A eine total unimodulare Matrix. Beweise, dass die Polyeder $\{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$ und $\{x \mid Ax \leq b, 0 \leq x \leq c\}$ nur ganzzahlige Ecken haben.

(Tipp: Zeige zuerst, dass für eine gegebene total unimodulare Matrix B das Polyeder $P(B, d) = \{x \mid Bx \leq d\}$ nur ganzzahlige Ecken besitzt. Verwende dies im nächsten Schritt, um die entsprechenden Aussagen für die obigen Polyeder herzuleiten.)

(3+4+8 Punkte)

Aufgabe 3 (Sensitivitätsanalyse):

(a) Seien $c = (2, 1, -1, 4)$, $b = (6, 3, 2)$ und $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Löse folgende Optimierungsaufgaben.

- $\max\{c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$
- $\max\{c^T x \mid Ax \leq b, x_2 + x_4 \leq 9, x \geq 0\}$.

(b) Seien $c = (-1, -2)$, $b = (-2, -3)$ und $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. Betrachte das LP

$$\max\{c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}.$$

Das optimale Tableau dazu sieht wie folgt aus:

		x_3	x_2
	-2	-1	-1
x_4	1	2	-1
x_1	2	1	-1

Die Spalte $A_{\bullet,2}$ ist eine Nichtbasisspalte und wir ändern sie um $\Delta = (\alpha, \beta)^T$. Untersuche, um wieviel diese Spalte geändert werden kann, ohne Optimalität zu verlieren. Gib dazu auch eine Abbildung zur geometrischen Interpretation an.

(12+8 Punkte)