

Lineare Optimierung Übung 6 vom 25.11.03

Abgabe der Aufgaben bis 11:00 Uhr am **Mittwoch, 03.12.03.** durch Einwurf in den Übungskasten im vierten Stock des Forumsgebäudes

Aufgabe 1 (Vermeidung von Zykeln):

Betrachte das Transportnetzwerk in Abbildung 1 und das zugehörige Versandproblem. Die Zahlen an den Kanten stehen für Kosten c_{ij} und die Zahlen an den Knoten für Bilanzen.

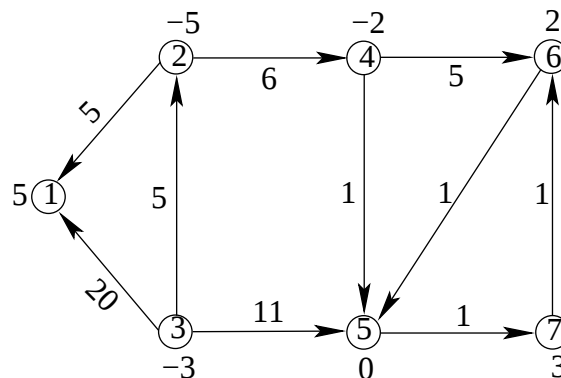


Abbildung 1: Ein Transportnetzwerk

Löse dieses Versandproblem mit dem Netzwerk-Simplexverfahren. Starte dabei mit folgender Basislösung:

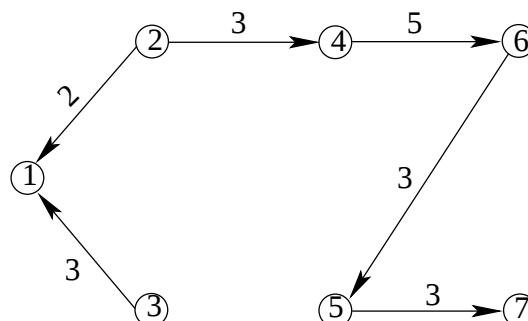


Abbildung 2: Die erste Basislösung

und benutze die Strategie von Cunningham zur Vermeidung von Zykeln bei der Bildung der neuen Basislösung $T + e - f$.

(15 Punkte)

Aufgabe 2 (Doppelt stochastische Matrizen):

Eine quadratische Matrix $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$ heisst *doppelt stochastisch*, wenn

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n a_{i,j} &= 1 \quad \text{für } j = 1, \dots, n \\ \sum_{j=1}^n a_{i,j} &= 1 \quad \text{für } i = 1, \dots, n \\ a_{i,j} &\geq 0 \quad \text{für } i, j = 1, \dots, n.\end{aligned}$$

Eine *Permutations-Matrix* ist eine $\{0, 1\}$ -Matrix mit genau einer 1 in jeder Zeile und jeder Spalte.

- (a) Zeige, dass jede Konvexkombination von Permutations-Matrizen eine doppelt stochastische Matrix ist.
- (b) Zeige, dass es für jede doppelt stochastische Matrix $X = (x_{ij})_{i,j=1}^n$ eine Permutations-Matrix $X^* = (x_{ij}^*)_{i,j=1}^n$ gibt, so dass $x_{ij}^* = 0$ falls $x_{ij} = 0$.
[Tipp: modelliere dieses Problem als ein Versandproblem in einem bipartiten Graphen mit Knoten $r_1, r_2, \dots, r_n, s_1, s_2, \dots, s_n$ und mit (r_i, s_j) als Kante genau dann wenn $x_{ij} > 0$ ($i, j = 1, \dots, n$). Benutze ausserdem den Ganzzahligkeitssatz.]
- (c) Beweise folgenden Satz mit Hilfe der Aufgabe 1.(b).

Satz von Birkhoff/von Neumann: Jede doppelt stochastische Matrix A ist eine Konvexkombination von Permutations-Matrizen.

Gib dazu einen Algorithmus an, der iterativ die Permutations-Matrizen $A_1, A_2, \dots$ konstruiert, so dass in der Iteration k folgendes gilt:

$$A = \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_{k-1} A_{k-1} + \lambda_k X,$$

wobei $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$, $\lambda_i \geq 0$ und X eine doppelt stochastische Matrix ist.

(5+10+15 Punkte)

Aufgabe 3 (Stark zulässige Bäume):

Zu einem Versandproblem $\min\{cx \mid Ax = b, x \geq 0\}$ auf einen gerichteten Graphen G mit Wurzel r , definieren wir ein ϵ -gestörtes Versandproblem $\min\{cx \mid Ax = b', x \geq 0\}$ mit $b'_v = b_v + \epsilon$ für jeden Knoten $v \neq r$ und $b'_r = b_r - (n-1)\epsilon$, wobei n die Anzahl der Knoten von G ist.

Zeige, dass für ein hinreichend kleines $\epsilon > 0$ jeder aufspannender Baum T in G zulässig für b' ist, genau dann wenn T stark zulässig für b ist.

(15 Punkte)