Abteilung für Mathematische Optimierung
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor Fekete
Dr. Laura Heinrich-Litan

WS 2003/04

Lineare Optimierung
Übung 5 vom 18.11.03

Abgabe der Aufgaben bis 11:00 Uhr am **Mittwoch, 26.11.03.** durch Einwurf in den Übungskasten im vierten Stock des Forumsgebäudes

Aufgabe 1 (Satz von König):

Gegeben sind n Frauen und n Männer. Jede Frau kennt genau $k \geq 1$ ihr sympathische Männer, und jeder Mann kennt genau k ihm sympathische Frauen. Zeige, dass es eine Zuordnung von Männern zu Frauen gibt, so dass jede/jeder einen sympathischen Partner bekommt.

(Tipp: modelliere dieses Problem als ein Versandproblem in einem bipartiten Graphen und benutze den in der Vorlesung angegebenen Ganzzahligkeitssatz. Ein Graph $G = (V, E)$ heißt bipartit, falls seine Knotenmenge V disjunkt in zwei Mengen A und B zerlegt werden kann, so dass innerhalb von A und innerhalb von B keine Kanten verlaufen.)

(20 Punkte)

Aufgabe 2 (Kreisfreie Graphen):

Zeige, dass ein kreisfreier Graph mit n Knoten und $n - k$ Kanten ($1 \leq k \leq n$) aus k disjunkten Bäumen besteht.

(10 Punkte)

Aufgabe 3 (Inzidenzmatrizen):

Sei A die $n \times m$ Inzidenzmatrix eines gerichteten Graphen. Betrachte die $n \times n$ Matrix $M = (m_{ij})$ mit $M := AA^t$ und zeige:

$$m_{ij} = \begin{cases} d(i) & \text{falls } i = j \\ -1 & \text{falls } i \text{ und } j \text{ adjazent} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

wobei $d(i)$ die Anzahl der mit dem i-ten Knoten inzidenten Kanten ist.

(10 Punkte)

Aufgabe 4 (Ein Versandproblem):

Betrachte das Transportnetzwerk in Abbildung 1 und das zugehörige Versandproblem. Die Zahlen an den Kanten stehen für Kosten c_{ij} und die Zahlen an den Knoten für Bilanzen.

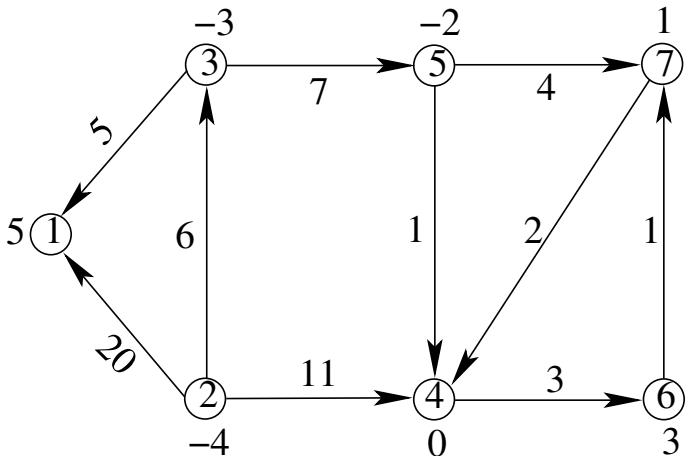

Abbildung 1: Ein Transportnetzwerk

Löse dieses Versandproblem mit dem Netzwerk-Simplexverfahren. Starte dabei mit folgender Basislösung:

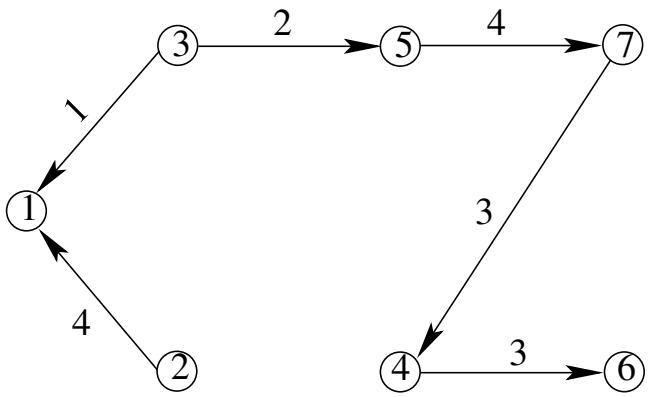

Abbildung 2: Die erste Basislösung

und wähle in jeder Iteration die Kante (i, j) mit maximalem, positivem Wert $y_j - y_i - c_{ij}$ zur Bildung der neuen Basislösung.

(20 Punkte)