$k \in N$, und $\tilde{b} := \bar{A}_B^{-1} b, d := \bar{A}_B^{-1} \bar{A}_k$. Falls eine zugehörige Kante, etwa

$$x_B = \tilde{b} - d x_k, x_k \geq 0,$$

im Polyeder P unbeschränkt ist, d. h. falls $x_{B(i)} \geq 0$ für alle $B(i) > n$ und daher $d_i \leq 0$ für $B(i) > n$, so liefert der Ansatz

$$v_B := -d, v_k := 1, v_{N \setminus k} := 0$$

eine zulässige Extremalrichtung. Dies folgt aus $t_{is} = v_{B(i)} \geq 0$ für $B(i) > n$ und

$$\bar{A} v = \bar{A}_B v_B + \bar{A}_k = \bar{A}_B(-\bar{A}_B^{-1} \bar{A}_k) + \bar{A}_k = 0.$$

Bemerkung: Unsere Kenntnisse über die im Simplexverfahren auftretenden Möglichkeiten zeigen für die Aufgabe $\max\{c^T x \mid x \in P(A, b)\}$

1. Eine endliche Optimallösung existiert genau dann, wenn eine optimale Basislösung existiert,

2. $c^T x$ ist nach oben unbeschränkt genau dann, wenn eine zulässige Extremalrichtung v mit $c^T v > 0$ existiert.

Erzeugendensysteme (EZS)

Sei $G = \{G_1, \ldots, G_r\}, H = \{H_1, \ldots, H_s\}$ mit $G, H \subseteq K^n$. G, H heißt EZS von $P(A, b)$, falls

$$P(A, b) = \text{conv } G + \text{cone } H,$$

wobei mit entsprechenden Matrizen $G = (G_1 \mid \ldots \mid G_r)$, $H = (H_1 \mid \ldots \mid H_s)$

$$\text{conv } G + \text{cone } H := \{Gp + Hq \mid 1^T p = 1, p \geq 0, q \geq 0\}.$$

Satz 6.2 *Jedes nichtleere Polyeder ist endlich erzeugt.*

Beweis. Sei $G = (G_1 \mid \cdots \mid G_r)$ die Matrix der auf den K^n projizierten zulässigen Basislösungen, $H = (H_1 \mid \cdots \mid H_s)$ die der projizierten zulässigen Extremalrichtungen.

a) Es gilt $AG_\mu \leq b$, $AH_\nu \leq 0$ für alle ν, μ. Seien $p, q \geq 0$ mit $1^T p = 1$. Aus

$$\begin{aligned} A(Gp + Hq) &= \sum_\mu \underbrace{(AG_\mu)}_{\leq b} p_\mu + \sum_\nu \underbrace{(AH_\nu)}_{\leq 0} q_\nu \\ &\leq (\sum_\mu p_\mu) b + (\sum_\nu q_\nu) 0 = b \end{aligned}$$

folgt $\text{conv } G + \text{cone } H \subseteq P(A, b)$.

b) Angenommen $\bar{x} \in P(A,b)$ aber $\bar{x} \notin \text{conv}G + \text{cone}H$. Dann ist das System

$$\begin{array}{lclcl} Gp & + & Hq & = & \bar{x}, \\ 1^T p & & & = & 1, \\ p \geq 0, & & q \geq 0 & & \end{array}$$

unlösbar. Nach einem Alternativsatz besitzt dann das System

$$\begin{array}{rcl} (c^T, \varrho) \begin{bmatrix} G & H \\ 1^T & 0 \end{bmatrix} & \geq & 0, \\ (c^T, \varrho) \begin{bmatrix} \bar{x} \\ 1 \end{bmatrix} & < & 0 \end{array}$$

eine Lösung. Nun betrachten wir das LP $z_* = \min\{c^T x \mid Ax \leq b\}$. Nach Voraussetzung ist $P \neq \emptyset$, insbesondere $\bar{x} \in P$. Die Zielfunktion ist nach unten beschränkt, da im ersten Block der Ungleichungen $c^T H \geq 0$. Also wird das endliche Optimum in einer Ecke angenommen, $c^T \bar{x} \geq z_* = c^T G_\mu$ für ein μ. Die widersprüchliche Ungleichungskette

$$c^T \bar{x} \geq z_* = c^T G_\mu \geq -\varrho > c^T \bar{x}$$

folgt nun aus dem ersten bzw. dem zweiten Ungleichungsblock.

□

Bemerkung: Wenn $P(A,b) \neq \emptyset$ und beschränkt, so gilt $P = \text{conv } G$. Dies ist eine triviale Folgerung aus Satz 6.2, da P in diesem Fall keine Extremalrichtungen besitzt. Auch für Kegel ergibt sich eine sehr spezielle Form des Satzes 6.2:

Satz 6.3 (Minkowski) *Jeder polyedrische Kegel $P(A,0)$ besitzt ein endliches Erzeugendensystem $U = (U_1 \mid \cdots \mid U_t)$ mit $P(A,0) = \text{cone } U$.*

Beweis. $P \overset{\text{Satz 6.2}}{=} \text{conv } G + \text{cone } H \subseteq \text{cone } (G,H) \overset{AG_\mu \leq 0}{\subseteq} P.$ □

Die Äquivalenz der verschiedenen Darstellungen folgt, da auch die Umkehrung des Satzes 6.2 gilt:

Satz 6.4 (Weyl) *Sei $P = \text{conv } G + \text{cone } H$ für $G = (G_1, \ldots, G_r)$, $H = (H_1, \ldots, H_s)$. Dann ist P ein Polyeder.*

Beweis. Wir betrachten die zum Erzeugendensystem gehörende $(n+1)$-zeilige Matrix

$$Q = \begin{bmatrix} G & H \\ 1^T & 0 \end{bmatrix}.$$

Nach Minkowski gilt

$$(*) \quad \{y \in K^{n+1} \mid y^T Q \geq 0\} = \text{cone } U = \{Uw \mid w \geq 0\}$$

für eine geeignete $(n+1)$-zeilige Matrix U, d. h. $y \in K^{n+1}$ mit $y^T Q \geq 0$ genau dann, wenn $y = Uw$ für ein $w \geq 0$. Sei $[-A \mid b] := U^T$. Nun ist $\bar{x} \in \text{conv } G + \text{cone } H$ gleichbedeutend mit der Lösbarkeit von

$$Q \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ 1 \end{bmatrix}, p \geq 0, q \geq 0$$

also, nach Alternativsatz, äquivalent zur Unlösbarkeit von

$$y^T Q \geq 0, \quad y^T \begin{bmatrix} \bar{x} \\ 1 \end{bmatrix} < 0.$$

Anders ausgedrückt, für alle $y \in K^{m+1}$ gilt äquivalent dazu

$$y^T Q \geq 0 \Longrightarrow y^T \begin{bmatrix} \bar{x} \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0,$$

oder, wegen $(*)$, für alle w gilt

$$w \geq 0 \Longrightarrow w^T U^T \begin{bmatrix} \bar{x} \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0.$$

Dies gilt genau dann, wenn

$$0 \leq U^T \begin{bmatrix} \bar{x} \\ 1 \end{bmatrix} = -A\bar{x} + b,$$

d. h. wenn $\bar{x} \in P(A, b)$. □

Bemerkung: Die Zeilen der Restriktionen $-Ax + b \geq 0$ zu $\text{conv } G + \text{cone } H$ liefern ein Erzeugendensystem des Kegels

$$y^T \begin{bmatrix} G & H \\ 1^T & 0 \end{bmatrix} \geq 0.$$

7 Dekomposition linearer Optimierungsaufgaben

Die Modellierung praktischer Probleme mit Hilfe von linearen Optimierungsaufgaben führt, wie bereits bei der Diskussion der Faktorisierungstechniken erwähnt, auf strukturierte Restriktionensysteme. Im einfachsten Fall zerfallen die Restriktionen in zwei Klassen, etwa in der Aufgabe

$$\max\{c^T x \mid Ax = b, x \geq 0\}, \tag{7.1}$$

mit $A = \begin{bmatrix} R \\ S \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}$.

Wir behandeln den zweiten Teil der Restriktionen implizit. Mit Hilfe des zugehörigen, unbekannten Erzeugendensystems G, H, für das gilt:

$$\{x \mid Sx = s, x \geq 0\} = \{Gp + Hq \mid 1^T p = 1, p \geq 0, q \geq 0\},$$

können wir x durch p, q darstellen. Das abgeleitete Problem heißt *Kernproblem.*

Kernproblem (äquivalent zu (7.1))

$$\max\{c^T(Gp + Hq) \mid R(Gp + Hq) = r, 1^T p = 1, p \geq 0, q \geq 0\}$$

Mit den sich daraus ergebenden Koeffizienten der Zielfunktion und Restriktionen lautet die Optimierungsaufgabe in p, q:

$$\max\left\{ \alpha^T \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \middle| D \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ 1 \end{bmatrix}, p \geq 0, q \geq 0 \right\}. \tag{7.2}$$

Bemerkung:

1. Das Kernproblem besitzt weniger Restriktionen aber sehr viele Variablen mit zunächst unbekannten Spalten.

2. Eine Lösung p, q des Kernproblems liefert eine Lösung $x = Gp + Hq$ des ursprünglichen Problems.

Revidiertes Verfahren zum Kernproblem

Bei revidierten Verfahren dürfen wir davon ausgehen, daß die Daten zur aktuellen Basis B bekannt sind, d. h. D_B, α_B liegen vor. Daher sind p, q, π leicht berechenbar:

$$D_B \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} r \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \pi^T D_B := \alpha_B^T.$$

Die für Optimalitätstest und Wahl der Pivotspalte notwendige Berechnung der reduzierten Kosten aus

$$\tilde{\alpha}_N^T := \alpha_N^T - \pi^T D_N$$

scheint zunächst daran zu scheitern, daß die Spalten D_N nicht bekannt sind. Die anschließend für den Unbeschränktheitstest benötigte Pivotspalte ergibt sich aus

$$D_B \tilde{D}_s := D_s.$$

Wenn wir $\pi^T = (y^T, \sigma)$ entsprechend den Restriktionen des Kernproblems zerlegen, können wir die reduzierten Kostenkoeffizienten $\tilde{\alpha}_\mu$ zu einer Basislösungsspalte bzw. $\tilde{\alpha}_\nu$ zu einer Extremalspalte genauer angeben:

$$\tilde{\alpha}_\mu = c^T G_\mu - y^T R G_\mu - \sigma = (c^T - y^T R) G_\mu - \sigma,$$

$$\tilde{\alpha}_\nu = c^T H_\nu - y^T R H_\nu = (c^T - y^T R) H_\nu.$$

Es genügt also, eine Basislösung G_μ oder eine Extremalrichtung H_ν mit positivem Zielfunktionswert bezüglich der Kostenkoeffizienten $c^T - y^T R$ zu finden, oder aber festzustellen, daß es keine gibt.

Hilfsproblem zur Pivotspaltenauswahl

Sei $\pi = (y^T, \sigma)$. Wir betrachten das Hilfsproblem

$$\max\{(c^T - y^T R)x \mid Sx = s, x \geq 0\}.$$

Die aktuelle Basislösung $x = (G \mid H)_B \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}_B$ des Kernproblems ist zulässig. Daher besitzt das Hilfsproblem entweder eine Extremalrichtung H_ν, in der die Zielfunktion unbeschränkt wächst, oder eine optimale Basislösung G_μ. Also sind nur die folgenden Fälle möglich:

a) Zielfunktion unbeschränkt in Richtung H_ν,

b) die optimale Basislösung x^* erfüllt $(c^T - y^T R)x^* > \sigma$,

c) die optimale Basislösung x^* erfüllt $(c^T - y^T R)x^* \leq \sigma$.

Wir lösen das Hilfsproblem mit dem revidierten Simplexverfahren.

ad a) Die gefundene Extremalrichtung H_ν mit $0 < (c^T y^T R)H_\nu = \tilde{\alpha}_\nu$ liefert die Pivotspalte

$$\begin{bmatrix} \alpha_\nu \\ D_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^T H_\nu \\ R H_\nu \\ 0 \end{bmatrix}.$$

ad b) Die gefundene optimale Basislösung $x^* = G_\mu$ mit $\tilde{\alpha}_\mu = (c^T - y^T R)G_\mu - \sigma > 0$ liefert die Pivotspalte

$$\begin{bmatrix} \alpha_\mu \\ D_\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^T G_\mu \\ R G_\mu \\ 1 \end{bmatrix}.$$

ad c) Für die optimale Basislösung x^* und daher erst recht für alle anderen Basislösungen G_μ gilt $(c^T - y^T R)G_\mu \leq (c^T - y^T R)x^* \leq \sigma$, d. h. $\tilde{\alpha}_\mu \leq 0$. Für alle Extremalrichtungen H_ν gilt entsprechend $(c^T - y^T R)H_\nu \leq 0$, also $\tilde{\alpha}_\nu \leq 0$. Also ist B eine optimale Basis des Kernproblems (7.2).

Bemerkung:

1. Das revidierte Verfahren zum Kernproblem (7.2) ist endlich.

2. Sei oBdA. $r \geq 0$. Wir beginnen das Verfahren mit einer Modifikation der Zweiphasenmethode.

(a) Wir wählen die künstlichen Variablen u zu $D\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} + u = \begin{bmatrix} r \\ 1 \end{bmatrix}$, $p \geq 0$, $q \geq 0$, $u \geq 0$ als Startbasis.

(b) Zur Elimination der künstlichen Variablen maximieren wir die Hilfszielfunktion $-\sum_{j \in Q} u_j$ mit $Q := \{j \mid u_j > 0\}$. Dabei wechselt Q von Basis zu Basis. Es gilt:

$$0^T p + 0^T q + d^T u = -\sum_{j \in Q} u_j \overset{\text{a)}}{=} d^T \begin{bmatrix} r \\ 1 \end{bmatrix} - d^T D \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

wobei $d_j := \begin{cases} 0 & j \notin Q, \\ -1 & j \in Q. \end{cases}$

Aus $c \equiv 0$ und $(y^T, \sigma) D_B := -d^T D_B$ ergeben sich die Koeffizienten des Hilfsproblems zur Pivotspaltenwahl. Wenn die Matrix R aus ρ Zeilen besteht, gilt $y^T = -(d_1, \ldots, d_\rho)$, $\sigma = -d_{\rho+1}$ und daher lautet das Hilfsproblem

$$\max\{(d_1, \ldots, d_\rho) R x \mid Sx = s, x \geq 0\}$$

3. Die Dekomposition ist nur sinnvoll, falls die auftretenden Hilfsprobleme "einfach" lösbar sind.

Beispiel (Blockstruktur): Bei Restriktionen, die aus schwach gekoppelten Blöcken bestehen, ist das Dekompositionsverfahren vielversprechend.

1. In der linearen Optimierungsaufgabe

$$\begin{array}{llllllllll}
\max & c_1^T x_1 & + & c_2^T x_2 & + & \ldots & + & c_k^T x_k & & \\
\text{unter} & R_1 x_1 & + & R_2 x_2 & + & \ldots & + & R_k x_k & = & r \;\}m_0 \\
& S_1 x_1 & & & & & & & = & s_1 \\
& & & S_2 x_2 & & & & & = & s_2 \\
& & & & & \ddots & & & & \\
& & & & & & & S_k x_k & = & s_k \\
& x_1 \geq 0 & & & & \ldots & & x_k \geq 0 & &
\end{array}$$

ersetzen wir die unabhängigen Teilrestriktionen $S_i x_i = s_i, x_i \geq 0$ durch

$$x_i = G_i p_i + H_i q_i, 1^T p_i = 1, p_i \geq 0, q_i \geq 0.$$

2. Das resultierende Kernproblem hat die Gestalt:

$$\begin{array}{lrcl}
\max & \sum_{i=1}^k (c_i^T G_i p_i + c_i^T H_i q_i) & & \\
\text{unter} & \sum_{i=1}^k (R_i^T G_i p_i + R_i^T H_i q_i) & = & r, \\
& 1^T p_i & = & 1, \\
& p_i \geq 0, q_i \geq 0. & &
\end{array}$$

3. Bei der Berechnung der reduzierten Kosten aus
$$\pi^T D_B = \alpha_B^T$$
setzt sich der Vektor π aus dem Vektor y zur koppelnden Restriktion mit m_0 Zeilen und den Skalaren $\sigma_i, i = 1, \ldots, k$, zu den unabhängigen Teilrestriktionen zusammen, d. h. $\pi^T = (y^T, \sigma_1, \ldots, \sigma_k)$. Die $(1 + m_0 + k)$-dimensionalen unbekannten Spalten zu Basislösungen und Extremalrichtungen sowie die zugehörigen reduzierten Kosten haben die Form
$$\begin{bmatrix} \alpha_{i\mu} \\ R_i G_{i\mu} \\ e_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{i\mu} \\ D_{i\mu} \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} \alpha_{i\nu} \\ R_i H_{i\nu} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{i\nu} \\ D_{i\nu} \end{bmatrix},$$
$$\tilde{\alpha}_{i\mu} = (c_i^T - y^T R_i) G_{i\mu} - \sigma_i \quad , \quad \tilde{\alpha}_{i\nu} = (c_i^T - y^T R_i) H_{i\nu}.$$

4. Bei der Lösung der unabhängigen Teilprobleme
$$z_i := \max\{(c_i^T - y^T R_i)x_i \mid S_i x_i = s_i, x_i \geq 0\} \quad (1 \leq i \leq k)$$
unterscheiden wir 2 Fälle.

   (a) Falls $z_i \leq \sigma_i$ für alle i, so ist B eine optimale Basis.

   (b) Es gibt ein Teilproblem i

      i. mit endlicher optimaler Basislösung $\bar{x}$ mit $z_i > \sigma_i$, so daß eine neue Pivotspalte zu $G_{i\mu} := \bar{x}$ generiert wird,

      ii. oder mit unbeschränkter Zielfunktion in Extremalrichtung v, so daß eine neue Spalte zu $H_{i\nu} := v$ generiert wird.

Bemerkung (Blockstruktur):

1. Im allgemeinen ist das Simplexverfahren ohne Dekomposition schneller.

2. Dekomposition ermöglicht jedoch die Behandlung sehr großer linearer Optimierungsaufgaben, falls die Struktur der Restriktionen ausgenutzt werden kann.

3. Anmerkungen zur Implementation findet man bei Ho und Loute in Mathematical Programming 20 (1981) 303-326.

Beispiel zum Dekompositionsverfahren:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcrcrcl}
\max & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & 2x_5 & - & 2x_6 & + & x_7 & & & & \\
\text{unter} & 4x_1 & - & 4x_2 & & & & 2x_4 & + & 2x_5 & - & 4x_6 & & & + & 2x_8 & = & 7 \\
 & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & & & & & & & & & = & 2 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & & & & & & & & & = & 2 \\
 & & & & & & & & & x_5 & - & x_6 & + & x_7 & & & = & 1 \\
 & & & & & & & & & -2x_5 & + & x_6 & & & + & x_8 & = & 2 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & x & \geq & 0
\end{array}$$

Vorbemerkung

Offensichtlich zulässige Basislösungen des 1. bzw. des 2. Teilproblems sind $x_3 = x_4 = 2$ bzw. $x_7 = 1$, $x_8 = 2$. Wir lösen die Teilprobleme zur Vereinfachung jeweils ausgehend von diesen Basislösungen. Wegen $m_0 = 1$ gilt $y \in \boldsymbol{R}$. Die jeweiligen von y abhängigen Kostenkoeffizienten, die wir mit $\gamma_1, \cdots, \gamma_8$ bezeichnen, sind in Phase I des Simplexverfahrens

$$\begin{aligned} \left[\gamma_1 \ldots \gamma_4 \right] &:= -y \left[4 \quad -4 \quad 0 \quad 2 \right], \\ \left[\gamma_5 \ldots \gamma_8 \right] &:= -y \left[2 \quad -4 \quad 0 \quad 2 \right] \end{aligned}$$

und in Phase II des Simplexverfahrens

$$\begin{aligned} \left[\gamma_1 \ldots \gamma_4 \right] &:= \left[2 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \right] - y \left[4 \quad -4 \quad 0 \quad 2 \right], \\ \left[\gamma_5 \ldots \gamma_8 \right] &:= \left[2 \quad -2 \quad 1 \quad 0 \right] - y \left[2 \quad -4 \quad 0 \quad 2 \right]. \end{aligned}$$

Für die gewählten Basislösungen ergeben sich daraus die reduzierten Kostenkoeffizienten in der üblichen Weise zu

$$\begin{aligned} \left[\tilde\gamma_1 \quad \tilde\gamma_2 \right] &= \left[\gamma_1 \quad \gamma_2 \right] - \left[\gamma_3 \quad \gamma_4 \right] \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \left[\gamma_1 - \gamma_3 - 2\gamma_4 \quad \gamma_2 - 2\gamma_3 - \gamma_4 \right], \\ \left[\tilde\gamma_5 \quad \tilde\gamma_6 \right] &= \left[\gamma_5 \quad \gamma_6 \right] - \left[\gamma_7 \quad \gamma_8 \right] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \left[\gamma_5 - \gamma_7 + 2\gamma_8 \quad \gamma_6 + \gamma_7 - \gamma_8 \right]. \end{aligned}$$

Die zugehörigen Zielfunktionswerte sind offenbar

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \left[\gamma_3 \quad \gamma_4 \right] \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 2\gamma_3 + 2\gamma_4, \\ \delta_2 &= \left[\gamma_7 \quad \gamma_8 \right] \begin{bmatrix} x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} = \gamma_7 + 2\gamma_8. \end{aligned}$$

Phase I

Start mit künstlicher Basis $B = (u_1\ u_2\ u_3)$; $D_B = E \rightsquigarrow x_B^T = \left[7 \quad 1 \quad 1 \right]$;

$$\left[y \quad \sigma_1 \quad \sigma_2 \right] := \pi^T := \pi^T D_B = d_B^T = \left[-1 \quad -1 \quad -1 \right]$$
$$\rightsquigarrow \begin{cases} \left[\gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \gamma_3 \quad \gamma_4 \right] = -yR_1 = R_1 = \left[-4 \quad 4 \quad 0 \quad 2 \right] \\ \left[\gamma_5 \quad \gamma_6 \quad \gamma_7 \quad \gamma_8 \right] = -yR_2 = R_2 = \left[-2 \quad 4 \quad 0 \quad -2 \right] \end{cases}$$

1. Teilproblem

$$\begin{aligned} \left[\tilde\gamma_1 \quad \tilde\gamma_2 \right] &= \left[4 - 0 - 2 \cdot 2 \quad -4 - 2 \cdot 0 - 2 \right] = \left[0 \quad -6 \right] \\ \delta_1 &= 2 \cdot 0 + 2 \cdot 2 = 4, \end{aligned}$$

d.h. $x_*^T = \left[0 \quad 0 \quad 2 \quad 2 \right]$ ist eine optimale BL, etwa G_{11}.

Wegen $z_1 = \delta_1 = 4 > -1 = \sigma_1$ erhält man als Pivotspalte

$$D_{11} = \begin{bmatrix} R_1 G_{11} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wegen $D_B = E$ ist $\tilde{D}_{11} = D_{11}$ und die übliche Pivotzeilenauswahlregel führt auf $u_2 \leftrightarrow p_{11}$. Die neue Basis ist $B = (u_1\ p_{11}\ u_3)$ mit

$$D_B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Hieraus folgt als Basislösung $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$. Aus $\pi^T D_B = d_B^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ergibt sich

$$\pi^T = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -1 \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} y & \sigma_1 & \sigma_2 \end{bmatrix}.$$

Bei unveränderten Kostenkoeffizienten der Teilprobleme bleibt das obige x_* OL von Teilproblem 1; es gilt nunmehr $z_1 = 4 = \sigma_1$.

2. Teilproblem

Mit $y = -1$ ergibt sich $\begin{bmatrix} \gamma_5 & \gamma_6 & \gamma_7 & \gamma_8 \end{bmatrix} = R_2$.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \tilde{\gamma}_5 & \tilde{\gamma}_6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2+0+2\cdot 2 & -4+0-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -6 \end{bmatrix} \\ \delta_2 &= 0+2\cdot 2 = 4 \end{aligned}$$

		x_5	x_6
	4	6	−6
x_7	1	$\boxed{-1}$	1
x_8	2	2	−1

$\longrightarrow$

		x_7	x_6
	10	−6	0
x_5	1		
x_8	4		

d.h. $x_*^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = G_{21}^T$ ist OL und wegen $z_2 = 10 > -1 = \sigma_2$ erhält man als Pivotspalte

$$D_{21} = \begin{bmatrix} R_2 G_{21} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Mit $\tilde{D}_{21} = D_{21}$ ergibt sich $u_1 \leftrightarrow p_{21}$. Die neue Basis ist also $B = (p_{21}\ p_{11}\ u_3)$ mit

$$D_B = \begin{bmatrix} 10 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

und der BL $\begin{bmatrix} \frac{3}{10} & 1 & \frac{7}{10} \end{bmatrix}^T$. $\pi^T D_B = d_B^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ führt auf

$$\pi^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{4}{10} & -1 \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} y & \sigma_1 & \sigma_2 \end{bmatrix}.$$

Bis auf den Faktor 10 ändern sich nur die Vorzeichen der reduzierten Kosten der Teilprobleme.

1. Teilproblem

$$\begin{aligned} 10 \begin{bmatrix} \tilde{\gamma}_1 & \tilde{\gamma}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 6 \end{bmatrix} \\ 10\delta_1 &= -4 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{|c|c|cc|} \hline & & x_1 & x_2 \\ \hline & -4 & 0 & 6 \\ \hline x_3 & 2 & -1 & \boxed{-2} \\ x_4 & 2 & -2 & -1 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|cc|} \hline & & x_1 & x_3 \\ \hline & 2 & -3 & -3 \\ \hline x_2 & 1 & & \\ x_4 & 1 & & \\ \hline \end{array}$$

d.h. $x_*^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = G_{12}$ und wegen $z_1 = \frac{2}{10} > -\frac{4}{10} = \sigma_1$ erhält man die neue Pivotspalte

$$D_{12} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Aus $\tilde{D}_{21}^T = \begin{bmatrix} -\frac{6}{10} & 1 & \frac{6}{10} \end{bmatrix}$ folgt $p_{11} \leftrightarrow p_{12}$.Also $B = (p_{21}\ p_{12}\ u_3)$ mit

$$D_B = \begin{bmatrix} 10 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

und der BL $\begin{bmatrix} \frac{9}{10} & 1 & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$. $\pi^T D_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ liefert

$$\pi^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{2}{10} & -1 \end{bmatrix} = =: \begin{bmatrix} y & \sigma_1 & \sigma_2 \end{bmatrix}.$$

Da die Kostenkoeffizienten der Teilprobleme sich nicht mehr ändern, bleibt G_{12} OL des 1. Teilproblemes. Dabei gilt $z_1 = \frac{2}{10} = \sigma_1$.

2. Teilproblem

$$\begin{aligned} 10 \begin{bmatrix} \tilde{\gamma}_5 & \tilde{\gamma}_6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -6 & 6 \end{bmatrix} \\ 10\delta_2 &= -4 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{|c|c|cc|} \hline & & x_5 & x_6 \\ \hline & -4 & -6 & 6 \\ \hline x_7 & 1 & -1 & 1 \\ x_8 & 2 & 2 & \boxed{-1} \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|cc|} \hline & & x_5 & x_8 \\ \hline & 8 & 6 & -6 \\ \hline x_7 & 3 & 1 & -1 \\ x_6 & 2 & 2 & -1 \\ \hline \end{array}$$

Das Teilproblem hat keine endliche Lösung. Es ergibt sich die homogene Extremallösung

$$H_{22}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Als neue Pivotspalte wird dann

$$D_{22} = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

transformiert; $\tilde{D}_{22}^T = \begin{bmatrix} -\frac{6}{10} & 0 & \frac{6}{10} \end{bmatrix}$ führt auf $u_3 \leftrightarrow q_{22}$.

Die neue Basis ist $B = (p_{21}\, p_{12}\, q_{22})$ mit

$$D_B = \begin{bmatrix} 10 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

und der BL $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$.

Phase II

Aus $\pi^T D_B = \alpha_B^T = \begin{bmatrix} c_2^T G_{21} & c_1^T G_{21} & c_2^T H_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ erhält man:

$$\pi^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{8}{6} & \frac{2}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & \sigma_1 & \sigma_2 \end{bmatrix}.$$

Die Kostenkoeffizienten der Teilprobleme sind:

$$\begin{aligned} c_1^T - yR_1 &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \\ c_2^T - yR_2 &= \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

1. Teilproblem

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \tilde{\gamma}_1 & \tilde{\gamma}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{4}{3} - 1 - 2\cdot(-\frac{1}{3}) & \frac{5}{3} - 2\cdot 1 - (-\frac{1}{3}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \delta_1 &= 2\cdot 1 + 2\cdot(-\frac{1}{3}) = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

		x_1	x_2
	$\frac{4}{3}$	1	0
x_3	2	-1	-2
x_4	2	$\boxed{-2}$	-1

$\longrightarrow$

		x_4	x_2
	$\frac{7}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
x_2	1		
x_1	1		

d.h. $x_*^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = G_{13}$ liefert wegen $z_1 = \frac{7}{3} > -\frac{8}{6} = \sigma_1$ die Pivotspalte

$$D_{13} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Aus $\tilde{D}_{13}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ folgt $p_{12} \leftrightarrow p_{13}$; die neue Basis ist $B = (p_{21}\ p_{13}\ q_{22})$ mit

$$D_B = \begin{bmatrix} 10 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

und der BL $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{7}{6} \end{bmatrix}$. Aus

$$\pi^T D_B = \alpha_B^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

ergibt sich

$$\pi^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & \sigma_1 & \sigma_2 \end{bmatrix}.$$

Bei unverändertem y scheidet das 1. Teilproblem mit $z_1 - \sigma_1 = 0$ aus.

2.Teilproblem

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \tilde{\gamma}_5 & \tilde{\gamma}_6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{5}{3} - 1 + 2(-\frac{1}{3}) & -\frac{4}{3} + 1 - (-\frac{1}{3}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \delta_2 &= 1 + 2(-\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Wegen $z_2 = \delta_2 = \frac{1}{3} = \sigma_2$ ist das Kernproblem optimal gelöst. Die Lösung ist

$$\begin{bmatrix} p_{21} & p_{13} & q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{7}{6} \end{bmatrix}.$$

Daraus folgt die Lösung des Orginalproblems

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix} &= p_{13} G_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \end{bmatrix} &= p_{21} G_{21} + q_{22} H_{22} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} + \frac{7}{6} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{13}{6} & \frac{7}{3} & \frac{7}{6} & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

mit Zielfunktionswert $z = \frac{23}{6}$.

8 Parametrische Kosten

Im Unterschied zur Sensitivitätsanalyse, wo wir uns im wesentlichen mit lokalen Änderungen der Koeffizienten des linearen Optimierungsproblems beschäftigt haben, wollen wir nun den globalen Einfluß von Parametern untersuchen. Für $t \in K^k$ betrachten wir die parametrische lineare Optimierungsaufgabe

$$\max\{c(t)^T x \mid \underbrace{Ax \leq b, x \geq 0}_{P}\}, \tag{8.1}$$

deren Zielfunktionskoeffizienten (affin) linear in t sind, etwa $c(t) = c + Dt$ für eine $n \times k$-Matrix D. Wir werden im folgenden wie bisher affin lineare Funktionen meist als linear bezeichnen.

Optimalitätsbereiche $T(B)$

Für eine festgewählte zulässige Basis B ist der Optimalitätsbereich definiert durch

$$T(B) := \{t \in K^k \mid \tilde{c}_N(t) \leq 0\},$$

wobei die reduzierten Kosten durch

$$\tilde{c}_N^T(t) := c_N^T(t) - c_B^T(t) A_B^{-1} A_N = (\underbrace{c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N}_{\tilde{c}_N^T}) + t^T (\underbrace{D_N^T - D_B^T A_B^{-1} A_N}_{\tilde{D}_N^T})$$

gegeben sind. Wegen ihrer Linearität in t gilt

Satz 8.1 *Jeder Optimalitätsbereich von (8.1) ist ein Polyeder.*

Im eindimensionalen Fall, $k = 1$, sind die Optimalitätsbereiche abgeschlossene Intervalle. Offenbar gilt

$$T := \bigcup_{B \text{ zulässig}} T(B) = \{t \mid (8.1) \text{ besitzt eine endliche Optimallösung}\}$$

und die Optimalwertfunktion $z : T \to K$

$$z(t) := \max\{c(t)^T x \mid x \in P\}$$

ist wohldefiniert.

Satz 8.2

1. T ist ein Polyeder.
2. Die Optimalwertfunktion $z : T \to K$ ist stetig und konvex.
3. Auf Optimalitätsbereichen ist z linear.

Beweis.

ad (1) Für $T = \emptyset$ oder $|T| = 1$ ist die Aussage trivial. Seien $u, v \in T$ mit $u \neq v$ und seien $x \in P, \lambda \in [0, 1]$. Dann gilt $c(u)^T x \leq z(u)$, $c(v)^T x \leq z(v)$, woraus

$$c(\lambda u + (1 - \lambda)v)^T x \overset{\text{affin linear}}{=} \lambda c(u)^T x + (1 - \lambda)c(v)^T x \leq \lambda z(u) + (1 - \lambda)z(v) \quad (+)$$

folgt. Also ist die Aufgabe (8.1) in $t = \lambda u + (1 - \lambda)v$ nach oben beschränkt, d. h. $t \in T$, und daher ist T konvex. Als endliche Vereinigung von Polyedern ist die konvexe Menge T ein Polyeder (s. Übungsaufgabe).

ad (2a) Wegen (+) gilt weiterhin $z(\lambda u + (1 - \lambda)v) \leq \lambda z(u) + (1 - \lambda)z(v)$, d. h. z ist konvex.

ad (3) Sei B zulässige Basis. Dann ist $z(t) = c_B^T(t) A_B^{-1} b$ für alle $t \in T(B)$, d. h. z ist affin linear auf $T(B)$.

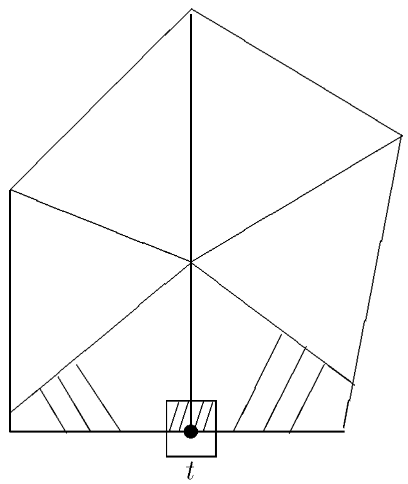


Abbildung I.3: Würfelumgebung im Beweis von Satz 8.2

ad (2b) Für $t \in T$ beliebig, sei $\mathcal{B}_1 := \{B \mid t \in T(B)\}$, $\mathcal{B}_2 := \{B \mid t \notin T(B)\}$. Da Optimalitätsbereiche Polyeder sind, gibt es eine Würfelumgebung $W(t)$, so daß

$$T \cap W(t) \subseteq T \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{B}_2} T(B) \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{B}_1} T(B)$$

Da $\mathcal{B}_1$ endlich und z affin linear, insbesondere stetig, auf jedem $T(B)$, $B \in \mathcal{B}_1$, folgt die Stetigkeit von z in t. □

Einparametrische Probleme

Die einfachste, eindimensionale parametrische Aufgabe besteht in der Berechnung einer Darstellung der optimalen Lösung für $t \in T$. Unter der Annahme $P \neq \emptyset$ untersuchen wir das einparametrische Problem

$$z(t) = \max\{(c + td)^T x \mid x \in P\}, \quad (t \in T). \tag{8.2}$$

T ist ein abgeschlossenes Intervall.

Bestimmung eines $t \in T$

Wir wählen ein beliebiges $t^0 \in K$. Annahme: $t^0 \notin T$. Wegen der Unbeschränktheit finden wir mit Hilfe des Simplexverfahrens eine Basis B und eine Pivotspalte mit $\tilde{c}_s + t^0 \tilde{d}_s < 0$, $A_B^{-1} A_s =: \tilde{A}_s \leq 0$.

1.Fall Falls $\tilde{d}_s = 0$, so ist $T = \emptyset$.

2.Fall Anderenfalls sei $\varrho := -\dfrac{\tilde{c}_s}{\tilde{d}_s}$.

1. Falls $\tilde{d}_s > 0$, so ist $\{t \in T \mid t > \varrho\} = \emptyset$.
2. Falls $\tilde{d}_s < 0$, so ist $\{t \in T \mid t < \varrho\} = \emptyset$.

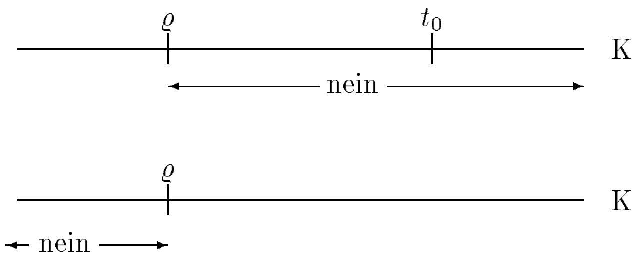


Abbildung I.4: Lage von T für $\tilde{d}_s > 0$ bzw. $\tilde{d}_s < 0$.

Setze $t^0 = \varrho$ und iteriere.

Problem:

$$\begin{array}{llcrcrcl}
\max & (2-2t)x_1 & + & (-1-t)x_2 & + & x_3 & & \\
\text{unter} & -x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & \leq & 2 \\
 & -x_1 & & & + & x_3 & \leq & 2 \\
 & & & & & x & \geq & 0
\end{array}$$

Lösung für $t = 0$

		$\Downarrow x_1$	x_2	x_3
$\tilde{c}$	0	2	-1	1
$\tilde{d}$	0	-2	-1	0
x_4	2	1	-1	2
x_5	2	1	0	-1
$t = 1$	0	0	-2	1

Das Tableau zur Basis $B = (4,5)$ bei $t = 0$ ist unbeschränkt ($s = 1$). Da $\varrho = -\frac{2}{-2} = 1$, gibt es für $t < 1$ keine endliche Lösung.

Lösung für $t = 1$

		$\Downarrow x_1$	x_2	x_5
	2	3	-1	-1
	0	-2	-1	0
x_4	6	3	-1	-2
x_3	2	1	0	-1
$t = 1$	2	1	-2	-1
$t = \frac{3}{2}$	2	0	$-\frac{5}{2}$	-1

Das Tableau zur Basis $B = (4,3)$ bei $t = 1$ ist unbeschränkt ($s = 1$). Da $\varrho = -\frac{3}{-2} = \frac{3}{2}$ gibt es für $t < \frac{3}{2}$ keine endliche Lösung. $B = (4,3)$ ist für $t = \frac{3}{2}$ eine optimale Basis. Offenbar gilt $T \subseteq \{t \mid t \geq \frac{3}{2}\}$.

Optimalitätsintervall zu $t^0 \in T$

Sei B eine optimale Basis in t^0. Die reduzierten Kosten definieren das zur Basis gehörende Optimalitätsintervall:

$$t^0 \in T(B) = \{t \mid \tilde{c}_N^T + t\tilde{d}_N^T \leq 0\} =: [\underline{t}, \bar{t}],$$

wobei gilt

$$\begin{array}{rcl} \bar{t} & = & \min\{-\frac{\tilde{c}_j}{\tilde{d}_j} \mid \tilde{d}_j > 0\}, \quad (= \infty, \text{ falls } \tilde{d} \leq 0), \\ \underline{t} & = & \max\{-\frac{\tilde{c}_j}{\tilde{d}_j} \mid \tilde{d}_j < 0\}, \quad (= -\infty, \text{ falls } \tilde{d} \geq 0). \end{array}$$

Außerhalb dieses Intervalls müssen wir andere optimale Basen finden.

Bestimmung einer neuen Basis in $\bar{t}$

Wir wählen eine Pivotspalte s mit $\bar{t} = -\frac{\tilde{c}_s}{\tilde{d}_s}$, $\tilde{d}_s > 0$.

1. Falls $\tilde{A}_s \geq 0$, so ist $\{t \in T \mid t > \bar{t}\} = \emptyset$.

2. Andernfalls bestimmen wir eine Pivotzeile r und berechnen eine entsprechende neue Basis $\bar{B}$, für die $\tilde{c}_s + t\tilde{d}_s = 0$ gilt. Der Zielfunktionswert und die reduzierten Kosten insgesamt ändern sich nicht, die neue Basis $\bar{B}$ ist optimal in $\bar{t}$. Allerdings ändern sich die einzelnen Summanden der reduzierten Kosten. Wegen $\bar{c}_s = -\frac{\tilde{c}_s}{\tilde{a}_{rs}}$, $\bar{d}_s = -\frac{\tilde{d}_s}{\tilde{a}_{rs}} < 0$, folgt
$$\bar{c}_s + t\bar{d}_s > \bar{c}_s + \bar{t}\bar{d}_s = 0,$$
für alle $t < \bar{t}$, d. h. $\underline{t}(\bar{B}) = \bar{t}(B)$.

Bemerkung:

1. Falls $\underline{t}(\bar{B}) = \bar{t}(\bar{B})$, so sind weitere Iterationen, notfalls mit einer Zusatzregel zur Vermeidung von Zyklen notwendig.

2. Nach endlich vielen Intervallen bricht das Verfahren ab.

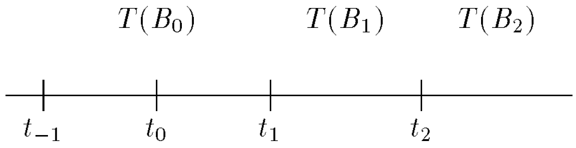


Abbildung I.5: Konstruktion der Optimalitätsintervalle

Bestimmung einer neuen Basis in $\underline{t}$

Nach unten suchen wir weitere Intervalle analog, beginnend mit einer Pivotspalte s, für die $\underline{t} = -\frac{\tilde{c}_s}{\tilde{d}_s}$, $\tilde{d}_s < 0$ gilt. Nach endlich vielen Schritten ist das Intervall T als Vereinigung der konstruierten Optimalitätsintervalle bestimmt. Zielfunktion und Basislösung sind durch die zugehörigen Basen festgelegt:

$$z(t) = c_B(t)A_B^{-1}b, \; x_B(t) = A_B^{-1}b$$

für alle $t \in T(B)$. In Zwischenpunkten ist jede Konvexkombination der optimalen Basislösungen ebenfalls optimal.

Problem:

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \max & t + (-1+t)x_1 & + & (0-2t)x_2 & & & & \\ \text{unter} & 3x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & \leq & 3 \\ & x_1 & - & x_2 & & & \leq & 5 \\ & & & & & x & \geq & 0 \end{array}$$

<u>Anfangsdaten</u>

		x_1	x_2	x_3
	0	-1	0	0
	1	1	-2	0
x_4	3	-3	-2	3
x_5	5	-1	1	0

$B_0 = (4,5)$ ist optimal in $t_0 = 0$. Aus $\bar{t} = -\frac{-1}{1} = 1$, $\underline{t} = -\frac{0}{-2} = 0$ folgt $T(B_0) = [0,1]$.

Die Lösung auf $T(B_0)$ ist $z(t) = t$,
$x_1(t) = x_2(t) = x_3(t) = 0$.

<u>Neue Basis für $t = 1$</u>

Für $s = 1$ finden wir $r = 1$.

		x_4	x_2	x_3
	-1	$1/3$	$2/3$	-1
	2	$-1/3$	$-8/3$	1
x_1	1	$-1/3$	$-2/3$	1
x_5	4	$1/3$	$5/3$	-1

$B' = (1,5)$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{obere Begrenzung:} & 1 \\ \text{untere Begrenzung:} & 1 \end{array}\right\} \; T(B') = \{1\}$$

$s = 3 \Longrightarrow r = 2$

		x_4	x_2	x_5
	-5	0	-1	1
	6	0	-1	-1
x_1	5	0	1	-1
x_3	4	$1/3$	$5/3$	-1

$B'' = (1,3)$

obere Begrenzung: ∞

$B'' = B_1 \Longrightarrow T(B_1) = [1, \infty)$

$z(t) = -5 + 6t$

$x(t) \equiv (5, 0, 4)$

Neue Basis für $t = 0$

Für $s = 2$ finden wir $r = 1$, das Pivotelement im Ausgangstableau ist $a_{rs} = -2$.

		x_1	x_4	x_3
	0	-1	0	0
	-2	4	1	-3
x_2	$3/2$	$-3/2$	$-1/2$	$3/2$
x_5	$13/2$	$-5/2$	$-1/2$	$3/2$

$\bar{B} = (2,5)$

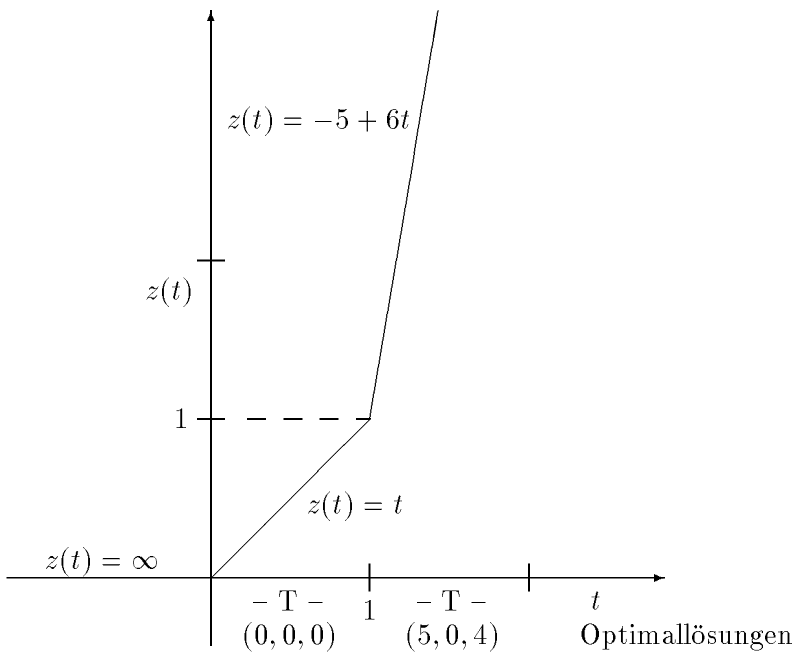
obere Begrenzung: 0

untere Begrenzung: $-\frac{0}{-3} = 0$

$\Longrightarrow T(\bar{B}) = \{0\}$

$s = 3 \Rightarrow$ es ex. keine endliche OL für $t < 0$

Die optimalen Zielfunktionswerte in Abhängigkeit von den Optimalitätsintervallen können wir graphisch darstellen:



Die Menge der Optimallösungen in den Zwischenpunkten enthält alle Konvexkombinationen der gefundenen optimalen Basislösungen:

$$\operatorname{conv}\left[\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3/2\\0\end{pmatrix}\right] \subseteq \{\text{Optimallösungen in } t=0\},$$

$$\operatorname{conv}\left[\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\0\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right] \subseteq \{\text{Optimallösungen in } t=1\}.$$

Bemerkung: Das Verfahren läßt sich nicht in einfacher Weise auf höhere Dimensionen übertragen. Schon für $k = 2$ sind ähnlich effektive Verfahren nicht mehr möglich. Abhilfe besteht nur in der Auswahl von Richtungen in höheren Dimensionen, für die dann jeweils eindimensionale Untersuchungen möglich sind.

Ein ganz anderer Ansatz zur Lösung des einparametrischen Optimierungsproblems besteht in der sukzessiven Approximation der stetigen und konvexen Zielfunktion. Solche Verfahren können ebenfalls nur für eindimensionale Probleme effektiv durchgeführt werden.

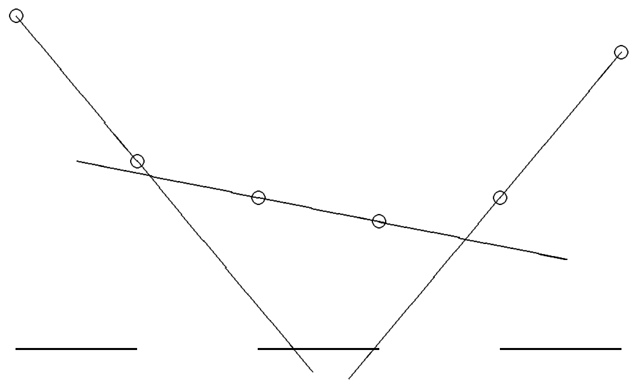


Abbildung I.6: Zur Approximation der Optimalwertfunktion

Dagegen gibt es wegen der Konvexität der Zielfunktion der parametrischen Aufgabe effektive Verfahren zur Bestimmung des globalen Minimums im Parameterraum:

Min-Max-Aufgabe

(8.3) $$\min_{t\in T} \max\{(c+Dt)^T x \mid x \in P\}$$

Für konvexe Aufgaben stimmen lokale und globale Minima überein.

Lemma 8.3 *$f : C \to K, C \subseteq K^k$ konvex, f konvex. $u \in C$. Dann sind äquivalent*

1. *u globales Minimum von f auf C.*

2. *u lokales Minimum von f auf C.*

Beweis. Globale Minima sind stets auch lokale Minima. Daher zeigen wir nur die Umkehrung, also *2.* $\Rightarrow$ *1.*. Sei $W(u)$ Würfelumgebung von u mit $f(u) \leq f(x)$ für alle $x \in W(u) \cap C$. Annahme: es gibt ein $v \in C$ mit $f(v) < f(u)$. Dann folgt aus der Konvexität:

$$f(\lambda v) + (1-\lambda)u) \leq \lambda f(v) + (1-\lambda)f(u) < \lambda f(v) + (1-\lambda)f(v) = f(v).$$

Da $(u, v) \cap W(u) \cap C \neq \emptyset$, ergibt sich ein Widerspruch. □

Optimierung in t auf $T(B)$

Wir wollen zunächst für eine feste Basis B, die in einem Punkt t_0 optimal ist, das globale Minimum $t^*(B)$ auf dem Polyeder $T(B) = \{t \in K^k \mid \tilde{D}_N t \leq -\tilde{c}_N\}$ bestimmen. Auf $T(B)$ gilt

$$z(t) = c_B^T(t) x_B = \underbrace{c_B A_B^{-1} b}_{\tilde{c}_0} + t^T \underbrace{D_B^T A_B^{-1} b}_{\tilde{d}}.$$

Also müssen wir die lineare Optimierungsaufgabe

$$z(t^*) = \min\{\tilde{c}_0 + \tilde{d}^T t \mid \tilde{D}_N t \leq -\tilde{c}_N\}$$

lösen.

Bemerkung:

1. $t^*(B)$ ist globales Minimum von z auf T, falls lokal optimal.

2. $t^*(B)$ ist lokal optimal, falls optimal für alle Basen B' mit $t^* \in T(B')$.

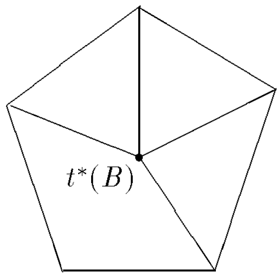


Abbildung I.7: Benachbarte Optimalitätsbereiche

3. $S = \{j \in N \mid \tilde{c}_j + (t^*)^T(\tilde{D}^T)_j = 0\}$. Dann gilt für eine Basis B' mit Basislösung x':

$$t^* \in T(B') \leftrightarrow x'_{N \setminus S} = 0.$$

Folgerung (Lokaler Optimalitätstest): Zum Test müssen wir alle Basen B', für die $x'_{N\setminus S} = 0$ gilt, untersuchen. Falls $t^*(B') = t^*(B)$ für alle diese Basen, dann ist $t^*(B)$ globales Minimum von z auf T. Anderenfalls finden wir eine Basis B' mit $z(t^*(B')) < z(t^*(B))$ und wiederholen den Test für die neuen Nachbarbasen.

Problem:

$$\min\{z(t) | t \in T\} \text{ für}$$

$$z(t) = \max \quad 2 + t_1 + \left((-2 \quad 0 \quad -4) + t^T \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \right) x$$

$$\text{unter} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad x \geq 0$$

Anfangslösung: $B_1 = (4, 5)$

		x_1	x_2	x_3
$\tilde{c}_0$	2	-2	0	-4
$\tilde{d}$	1	-1	-1	1
	0	0	4	-2
x_4	8	-1	-1	-1
x_5	4	1	3	-3
$\tilde{c}_N(t_*)$	0	0	0	-5

ist optimal für $t = 0$

Optimierung in t :

$$\begin{array}{llcccl} \max & -2 - t_1 & & & & \\ \text{unter} & -t_1 & & & & \leq 2 \\ & -t_1 & + & 4t_2 & & \leq 0 \\ & t_1 & - & 2t_2 & & \leq 4 \end{array}$$

$\Rightarrow t_* = (-2, -1/2)^T, \quad z(t_*) = 0$

$\Rightarrow S = (1, 2) \Rightarrow x_3 = 0$

Enumeration der Basen mit $x_3 = 0$

B_1 nicht entartet $\Rightarrow$ Pivot nur in Spalte x_1, x_2
$\Rightarrow$ Pivot nur in Zeile zu x_4

d.h. zu untersuchende Nachbarbasen: $B_2 = (1, 5)$, $B_3 = (2, 5)$

Basis $B_2 = (1, 5)$:

		x_4	x_2	x_3
	-14	-2	-2	2
	-7	1	0	2
	0	0	-4	2
x_1	8	-1	-1	-1
x_5	12	-1	2	-4

Optimierung in t:

$$\begin{array}{llcccl} \max & 14 + 7t_1 & & & & \\ \text{unter} & t_1 & & & \leq & -2 \\ & & + & 4t_2 & \leq & -2 \\ & 2t_1 & - & 2t_2 & \leq & 2 \end{array}$$

$\Rightarrow t_*$ optimal für B_2

Keine weiteren Nachbarbasen mit $x_3 = 0$, da (1,2) unzulässig.

(Der Tausch $x_4 \leftrightarrow x_5$ ist unzulässig, da dann $x_1 < 0$)
<u>Basis $B_3 = (2, 5)$:</u>

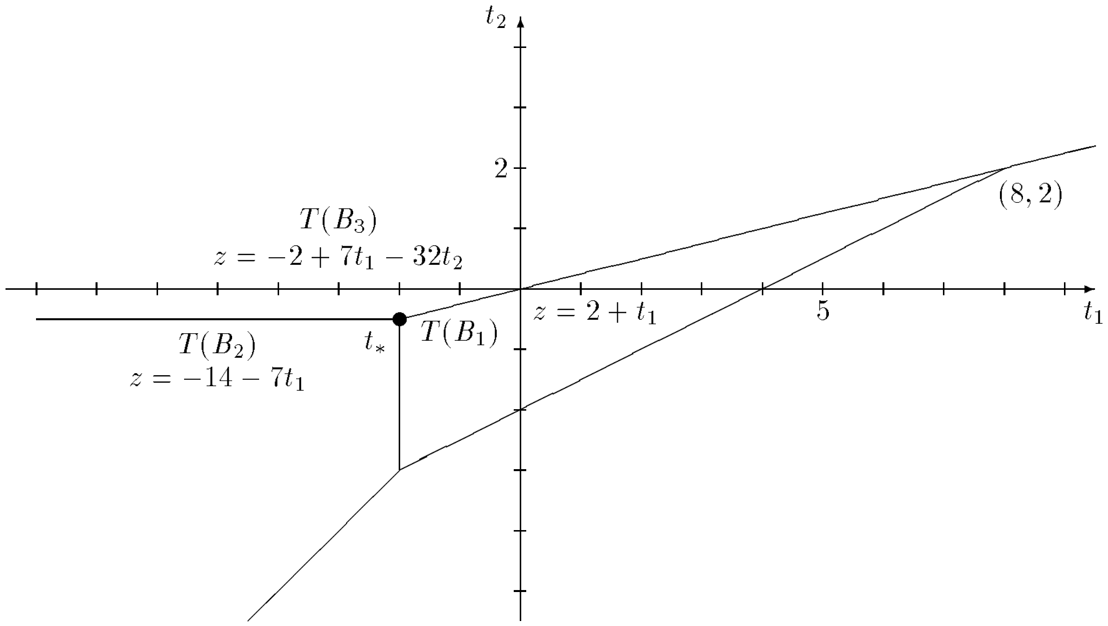
		x_1	x_4	x_3
	-2	-2	0	-4
	7	0	1	2
	-32	-4	-4	-6
x_2				
x_5				

Optimierung in t:

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \max & -2 & + & 7t_1 & - & 32t_2 & & \\ \text{unter} & & & & - & 4t_2 & \leq & 2 \\ & & & t_1 & - & 4t_2 & \leq & 0 \\ & & & 2t_1 & - & 6t_2 & \leq & 4 \end{array}$$

$\Rightarrow t_*$ auch optimal für B_3

Alle Basen mit $x_3 = 0$ untersucht $\Rightarrow t_*$ optimal



Mehrere Zielfunktionen

Eine in nahezu allen Anwendungen auftretende Schwierigkeit besteht darin, daß mehrere Zielsetzungen gleichzeitig verfolgt werden, die oft widersprüchlich sind. Die von uns bisher behandelten Aufgaben gehen aber nur von einer einzigen Zielfunktion aus. Die gleichzeitige Minimierung mehrerer linearer Zielfunktionen, etwa von Cx mit einer geeigneten $k \times n$ Matrix C, auf einem Polyeder $P = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$ ist offensichtlich nicht immer möglich.

Beispiel: $C := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} c_1^T \\ c_2^T \end{bmatrix}$. Durch Setzung von Prioritäten oder durch Wichtung

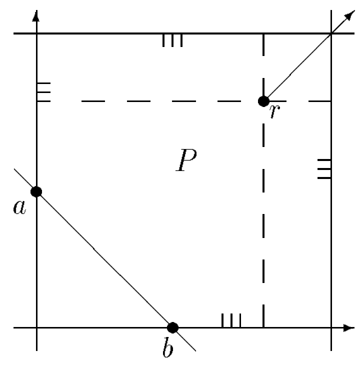


Abbildung I.8: Zwei Zielfunktionen

der einzelnen Ziele kann man versuchen, eine Zielsetzung abzuleiten, die sich wieder mit einer Zielfunktion beschreiben läßt und die den zugrundeliegenden Intentionen möglichst nahe kommt.

1. Gelingt eine klare Reihung der Zielvorgaben, so kann man sukzessive minimieren:

$$z_1^* = \min\{c_1^T x \mid x \in P\}, \;\; z_2^* = \min\{c_2^T x \mid x \in P, c_1^T x = z_1^*\}, \ldots$$

   Im Beispiel finden wir die Optimallösung a, bei entgengesetzter Reihenfolge die Optimallösung b.

2. Ordnen wir den einzelnen Zielen relative Gewichte zu, etwa

$$z^* = \min\{\alpha(c_1^T x) + \beta(c_2^T x) \mid x \in P\},$$

   mit geeigneten Gewichten $\alpha, \beta \in (0,1)$, so ergeben sich viele Möglichkeiten. Im obigen Beispiel liefert der gleichgewichtige Ansatz $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ den optimalen Zielfunktionswert $z^* = \frac{1}{2}(1 \quad 1)Cx$ für alle $x \in [a, b]$.

Gewichtete Lineare Optimierungsaufgaben

Für $w > 0$, $w \in K^k$ betrachten wir:

$$\min\{w^T Cx \mid x \in P\}. \tag{8.4}$$

Effiziente Lösungen

Bei mehreren Zielfunktionen sind die Lösungen nur partiell geordnet:

1. für $x, y \in P$ heißt x *besser* als y, falls $Cx \leq Cy$;

2. ein $y \in P$ heißt *effizient*, falls für alle $x \in P$ gilt: $Cx \leq Cy \Rightarrow Cx = Cy$.

In effizienten Lösungen kann man eine der Zielfunktionen nur dann echt verbessern, wenn man gleichzeitig die Verschlechterung einer anderen Zielfunktion in Kauf nimmt. Zwischen effizienten Lösungen und gewichteten linearen Optimierungsaugaben besteht ein enger Zusammenhang.

Satz 8.4 *$\bar{x}$ ist eine effiziente Lösung genau dann, wenn ein $w > 0$ existiert, so daß $\bar{x}$ eine Optimallösung zur entsprechenden gewichteten Aufgabe (8.4) ist.*

Beweis.

1. Zunächst konstruieren wir zu einem effizienten $\bar{x}$ ein passendes Gewicht $w > 0$. Sei dazu
$$\alpha = \max\{1^T z \mid Ax = b, Cx + z = C\bar{x}, x \geq 0, z \geq 0\}.$$
Dann ist $(\bar{x}, 0)$ zulässig und optimal, da $\bar{x}$ effizient, und es gilt $\alpha = 0$. $-\bar{y}, \bar{w}$ sei eine duale Optimallösung mit
$$\begin{array}{rcrcl} -\bar{y}^T A & + & \bar{w}^T C & \geq & 0^T \\ & & \bar{w} & \geq & 1^T \\ -\bar{y}^T b & + & \bar{w}^T C\bar{x} & = & 0 \end{array} \text{, also} \quad \begin{array}{rcl} \bar{y}^T b & = & \bar{w}^T C\bar{x} \\ \bar{y}^T A & \leq & \bar{w}^T C \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} A\bar{x} & = & b \\ \bar{x} & \geq & 0 \end{array}.$$
Daher sind $\bar{y}, \bar{x}$ optimales Paar zu den dualen Aufgaben
$$\begin{array}{lrcl} \max & y^T b & & \\ \text{unter} & y^T A & \leq & \bar{w}^T C \end{array} \quad = \quad \begin{array}{lrcl} \min & \bar{w}^T Cx & & \\ \text{unter} & Ax & = & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$
Insbesondere ist $\bar{x}$ Optimallösung der gewichteten Aufgabe (8.4) mit $w = \bar{w}$.

2. Umgekehrt sei $\bar{x}$ sei eine Optimallösung zur Aufgabe 8.4 mit $w > 0$. Dann gilt $w^T C\bar{x} \leq w^T Cx$ für alle $x \in P$, also $w^T(C\bar{x} - Cx) \leq 0$ für alle $x \in P$. Sei $x \in P$ mit $Cx \leq C\bar{x}$. Wegen $w > 0$ folgt $0 \leq w^T(C\bar{x} - Cx) \leq 0$. Da $w > 0$ muß $C\bar{x} = Cx$ gelten. □

Bemerkung:

1. **Jede** Optimallösung der gewichteten Aufgabe (8.4) ist effizient, d. h. effiziente Lösungen zu fixem $w > 0$ sind nicht eindeutig.

2. Auch das Gewicht $\bar{w}$ zu einer effizienten Lösung ist nicht eindeutig. Eine Basis B ist optimal zu $\bar{w}$ genau dann, wenn $\bar{w} \in T(B) = \{w \mid w^T C_N \geq w^T C_B A_B^{-1} A_N\}$.

3. Theoretisch können wir alle effizienten Lösungen mit Hilfe geeigneter Gewichte bestimmen. Die Lösung der entsprechenden parametrischen Aufgabe erweist sich aber in den Anwendungen als zu aufwendig, so daß wir uns auf eine Auswahl der Parameterwerte beschränken müssen.

9 Parametrische Beschränkungen

Da sich Parameter in den Beschränkungen weitgehend durch Übergang zum dualen Problem, in dem dann Parameter in der Zielfunktion vorliegen, behandeln lassen, können wir uns unter Ausnutzung der Ergebnisse des letzten Abschnittes recht kurz fassen. Wir untersuchen die Aufgabe

$$z(t) := \max\{c^T x \mid \underbrace{Ax \leq b(t), x \geq 0}_{P(t)}\},\ t \in K^k \tag{9.1}$$

mit $b(t) = b + Ft$, F $m \times k$-Matrix.

Optimalitätsbereiche $\boldsymbol{T(B)}$

Für eine dual zulässige Basis B der Aufgabe (9.1), d. h. mit $c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N \leq 0$, folgt

$$T(B) = \{t \in K^k \mid x_B(t) \geq 0\}.$$

Da $x_B(t) = A_B^{-1}(b + Ft)$ affin linear in t, ist $T(B)$ polyedrisch.

Der Parameterbereich T aller Parameter, für die $z(t)$ endlich ist, ist die Vereinigung aller Optimalitätsbereiche zu dual zulässigen Basen.

Satz 9.1 *1. T ist ein Polyeder.*

2. Die Optimalwertfunktion $z : T \to K$ ist stetig und konkav.

3. Auf Optimalitätsbereichen ist z affin linear.

Beweis. Es genügt, Satz 8.2 auf das duale Problem

$$\min\{b(t)^T y \mid \underbrace{A^T y \geq c, y \geq 0}_{D}\} = -\max\{(-b(t))^T y \mid (-A)^T y \leq -c, y \geq 0\}$$

anzuwenden. □

Existenz und Endlichkeit

Zunächst gilt es, einen Parameterwert t mit $P(t) \neq \emptyset$ zu finden. Dazu bestimmen wir eine zulässige Lösung des Polyeders

$$Ax - Ft \leq b, x \geq 0.$$

Falls auch das duale Polyeder

$$D := \{y \mid A^T y \geq c, y \geq 0\}$$

nicht leer ist, so ist die parametrische Aufgabe für alle t mit $P(t) \neq \emptyset$ beschränkt.

Einparametrische Probleme

Für $D \neq \emptyset$, können wir die eindimensionale parametrische Aufgabe

$$z(t) = \max\{c^T x \mid Ax \leq b + ft, x \geq 0\}, \tag{9.2}$$

für alle $t \in T$ lösen. T ist ein abgeschlossenes Intervall.

Optimalitätsintervall zu $t^0 \in T$

Sei B eine in t^0 optimale Basis mit zugehörigem Tableau

			N
	γ	δ	c^T
B	b	f	A

.

Offenbar gilt $t^0 \in T(B) = \{t \mid \underbrace{b + tf}_{x_B(t)} \geq 0\} = [\,\underline{t},\ \bar{t}\,]$.

Bestimmung einer neuen Basis in $\bar{t}$

Da nur die primale Zulässigkeit vom Parameterwert abhängt, verwenden wir das duale Simplexverfahren. Wir wählen eine Pivotzeile r mit $\bar{t} = -\frac{b_r}{f_r}$ mit $f_r < 0$.

1. Falls $a_{rj} \geq 0$ für alle j, so ist $P(t) = \emptyset$ für alle $t > \bar{t}$.

2. Andernfalls führen wir einen dualen Pivotschritt mit einem Pivot $a_{rs} < 0$ aus, und finden eine neue Basis $\tilde{B}$, die wieder dual zulässig in $\bar{t}$ ist. Es gilt $\underline{t}(\tilde{B}) = \bar{t}(B)$.

Bei $\underline{t}$ können wir analog vorgehen.

Beispiel:

$$\begin{array}{rlrcrcl}
z(t) = & \max & -3x_1 & - & 2x_2 & & \\
& \text{unter} & x_1 & + & x_2 & \leq & 1+t \\
& & 2x_1 & - & x_2 & \leq & 4-t \\
& & & & x & \geq & 0
\end{array}$$

Anfangstableau:

	b	f	x_1	x_2
	0	0	-3	-2
x_3	1	1	-1	-1
x_4	4	-1	-2	1

$B = (3, 4)$

optimal, zulässig für $t = 0$

$\bar{t} = 4, \underline{t} = -1$

$z(t) = 0$

Neue Basis in $t = 4$:

$r = 2 \Rightarrow s = 2$

			x_1	x_4
	8	-2	-7	-2
x_3	5	0	-3	-1
x_2	-4	1	2	1

$B = (2, 3)$

optimal, zulässig für $t = 4$

$\bar{t} = \infty, \underline{t} = 4$

$z(t) = 8 - 2t$

Neue Basis in $t = -1$:

$r = 1$. Wegen $a_{r1} = a_{r2} = 1 \geq 0$: $P(t) = \emptyset$ für $t < -1$.

b als Parameter

Die Abhängigkeit der parametrischen Aufgabe von den Resourcen b wollen wir noch etwas genauer untersuchen. Dazu betrachten wir

(9.3)
$$z(b) = \min\{c^T x \mid \underbrace{Ax \geq b, x \geq 0}_{P(b)}\}$$

mit nichtleerem dualen Polyeder $\emptyset \neq D = \{y \mid y^T A \leq c^T, y^T \geq 0\} =: \mathrm{conv}G + \mathrm{cone}H$, sowie die zugehörige duale Aufgabe

(9.4)
$$z(b) = \min\{b^T y \mid y \in D\}.$$

Der Parameterkegel T

Die Menge T der Parameter, für die eine endliche Lösung existiert, ist hier ein Kegel:

$$T = \{b \mid P(b) \neq \emptyset\} = \{b \mid b^T H \leq 0\}.$$

Optimalitätsbereichskegel $T(\bar{g})$ zu $\bar{g} \in G$

Auch die Optimalitätsbereiche zu den Ecken des Polyeders sind Kegel:

$$T(\bar{g}) = \{b \in T \mid b^T \bar{g} = z(b)\} = \{b \in T \mid b^T \bar{g} \leq b^T g \text{ für alle } g \in G\}.$$

Falls $g \neq \bar{g}$, so enthält $T(g) \cap T(\bar{g})$ keine inneren Punkte.

Die optimale Seite $D^*(b)$ zu $b \in T$

Mit Hilfe des Erzeugendensystems kann man die optimale Seite leicht angeben:

(9.5)
$$D^*(b) = \mathrm{conv}\{g \in G \mid b^T g = z(b)\} + \mathrm{cone}\{h \in H \mid b^T h = 0\}.$$

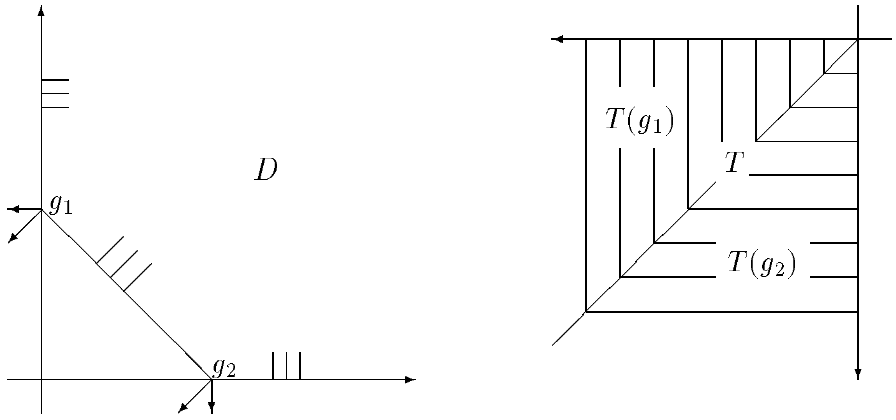


Abbildung I.9: D und der Parameterkegel

Zulässige Richtungen d in $b \in T$

Um die Änderung der Zielfunktionswerte in gewissen Richtungen zu diskutieren, müssen wir zunächst einmal feststellen, welche Richtungen innerhalb von T möglich sind. Für $0 \neq d \in K^n$ heißt d *zulässige* Richtung in $b \in T$, falls für ein positives $\bar{\delta} \in K$ gilt:

$$b + \delta d \in T \quad \text{für alle } 0 \leq \delta \leq \bar{\delta}. \tag{9.6}$$

Wegen der Charakterisierung von T ist dies äquivalent zu

$$(b + \delta d)^T H \leq 0 \quad \text{für alle } 0 \leq \delta \leq \bar{\delta},$$

und daher zu

$$(b^T h = 0 \Rightarrow d^T \leq 0) \quad \text{für alle } h \in H. \tag{9.7}$$

Satz 9.2 *Sei $K = \boldsymbol{R}$. Für $b \in T$ und zulässige Richtung d in b existiert die Richtungsableitung $\nabla z(b,d)$ und*

$$\nabla z(b,d) = \max\{d^T y \mid y \in D^*(b)\}$$

Beweis.

1. Wegen (9.5) und (9.7) gilt

$$d^T g_* = \max\{d^T y \mid y \in D^*(b)\}$$

für ein $g_* \in G$ mit $b^T g_* = z(b)$.

2. Die Abbildung 1 zeigt, daß wegen der Konvexität der Funktion $z(b + \delta d)$ in δ der Differenzenquotient $\frac{\Delta z(\delta)}{\delta}$ isoton in δ ist. Außerdem gilt

$$z(b + \delta d) \geq (b + \delta d)^T g_* = \underbrace{b^T g_*}_{z(b)} + \delta d^T g_*$$

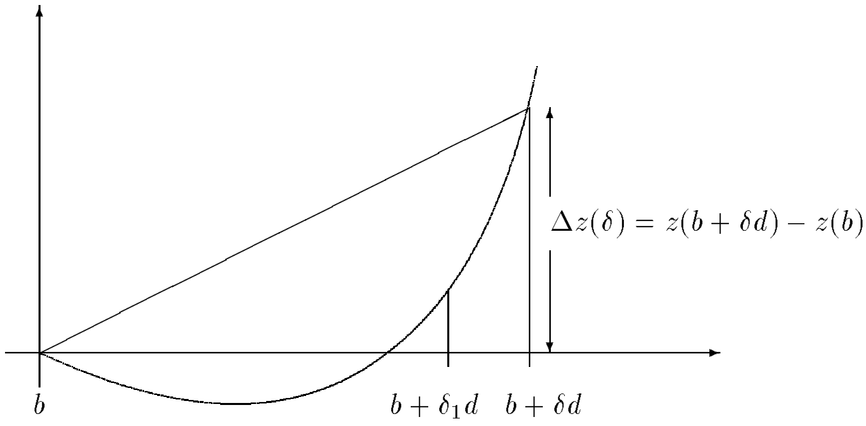


Abbildung I.10: Eigenschaften von $z(b+\delta d)$

und damit

$$\frac{\Delta z(\delta)}{\delta} \geq d^T g_*$$

für alle hinreichend kleinen $\delta > 0$.

3. Sei $0 \leq \delta_k \leq \bar{\delta}$ mit $b+\delta_k d \in T$, $\delta_k \searrow 0$. Da G endlich, gibt es eine Teilfolge genügend großer Indizes k mit

$$z(b+\delta_k d) = (b+\delta_k d)^T \bar{g}$$

für ein festes $\bar{g} \in G$. Dies sei oBdA die betrachtete Folge. Dann folgt

$$b^T g_* + \delta_k d g_* \leq z(b+\delta_k d) = (b+\delta_k d)^T \bar{g} = b^T \bar{g} + \delta_k d^T \bar{g}$$

und damit

$$\delta_k (d^T \bar{g} - d^T g_*) \geq \underbrace{b^T g_*}_{z(b)} - b^T \bar{g} \geq 0.$$

Durch Grenzübergang für $\delta_k \to 0$ erhalten wir $b^T g_* = b^T \bar{g}$, d. h. $\bar{g} \in D^*(b)$. Damit folgt unter Berücksichtigung der unter *2.* hergeleiteten 2. Ungleichung

$$d^T g_* \leq \frac{\Delta z(\delta_k)}{\delta_k} = \frac{(b+\delta_k d)^T \bar{g} - b^T \bar{g}}{\delta_k} = d^T \bar{g} \leq d^T g_*.$$

Wegen der Isotonie muß sogar $\frac{\Delta z(\delta)}{\delta} = d^T g_*$ für $0 \leq \delta \leq \bar{\delta}$ gelten, woraus folgt

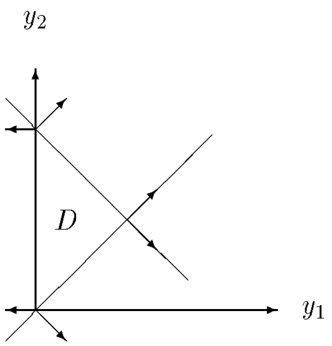
$$\nabla z(b,d) = \lim_{\delta \to 0} \frac{\Delta z(\delta)}{\delta} = d^T g_*.$$

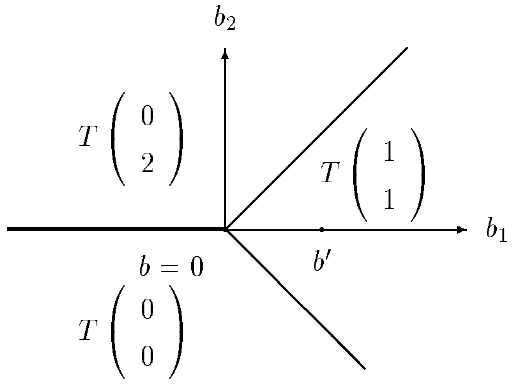
□

Beispiel:

$$\begin{array}{lrcrcl} \min & 2x_1 & & & & \\ \text{unter} & x_1 & + & x_2 & \geq & b_1 \\ & x_1 & - & x_2 & \geq & b_2 \\ & & & x & \geq & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{lrcrcl} \max & b_1 y_1 & + & b_2 y_2 & & \\ \text{unter} & y_1 & + & y_2 & \leq & 2 \\ & y_1 & - & y_2 & \leq & 0 \\ & & & y & \geq & 0 \end{array}$$

$P(b) \neq \emptyset \quad \forall\, b,\, T = \boldsymbol{R}^2.$ $\qquad$ $D \neq \emptyset$, beschränkt.





Es gilt $D = \operatorname{conv}(\binom{0}{0}, \binom{1}{1}, \binom{0}{2})$. Insbesondere gilt $D^*(0) = D$ und

$$\nabla z(0, d) = \max\{d^T y \mid y \in D\}.$$

Andererseits ergeben sich die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial z}{\partial b_1}(0) = \nabla z(0, e_1) = e_1^T \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 1,$$

$$\frac{\partial z}{\partial b_2}(0) = \nabla z(0, e_2) = e_2^T \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = 2.$$

Für hinreichend kleine Störungen folgt $z(0 + \Delta b_1 e_1) = z(0) + 1\Delta b_1$, aber, da z nicht differenzierbar ist, gibt dies nur das Verhalten in Richtung e_1 exakt wieder. Im allgemeinen ist also

$$z(0 + \Delta b) \neq z(0) + 1\Delta b_1 + 2\Delta b_2.$$

Zur Differenzierbarkeit

1. Falls $D^*(b) = \{y_*\}$, so ist z differenzierbar in b und es gilt $\nabla z(b, d) = y_*^T d$.

2. Für $b' \in \mathring{T}\,(y_*)$ gilt $D^*(b') = \{y_*\}$. Die eindeutige duale OL y_* liefert dann sogenannte Schattenpreise:
$$(y_*)_i = \frac{\partial z}{\partial b_i}$$

In unserem Beispiel ist z in $b' = \binom{1}{0} \in \overset{\circ}{T}\binom{1}{1}$ differenzierbar. Also gilt $\nabla z(b', d) = d^T\binom{1}{1}$ für alle d. Für $b' + \Delta b \in T\binom{1}{1}$ können wir damit leicht den Optimalwert berechnen:

$$z(b' + \Delta b) = z(b') + 1\Delta b_1 + 1\Delta b_2.$$

Parametrische Kosten lassen sich in analoger Weise analysieren.

Allgemeine parametrische LP

Abschließend soll noch kurz das allgemeine lineare parametrische Optimierungsproblem angesprochen werden:

$$\max\{c(t)^T x \mid A(t)x \leq b(t), x \geq 0\} \tag{9.8}$$

mit $c(t) = c + Dt, b(t) = b + Ft, A(t) = A + Ht$. Hier ist H eine $m \times n \times k$ Matrix. Wir ergänzen die Aufgabe wie bisher mit geeigneten Schlupfvariablen.

Optimalitätsbereiche

Die Optimalitätsbereiche zu Basen lassen sich mit Hilfe der primalen und dualen Zulässigkeit charakterisieren. Problematisch ist die Tatsache, daß sich der Rang einer Spaltenmenge ändern kann. Sei $B \subseteq \{1, 2, \ldots, m + n\} =: MN$. Dann ist

$$T(B) = \{t \mid A_B(t) \text{ regulär },\ A_B(t)^{-1}b(t) \geq 0,\ c_N(t)^T - c_B(t)^T A_B(t)^{-1} A_N(t) \leq 0\}.$$

Optimalwertfunktion $z : T \to \boldsymbol{R}$

Der Parameterbereich T setzt sich aus den Optimalitätsbereichen zu den möglichen Basen zusammen:

$$T := \{t \mid (9.8) \quad \text{endlich}\} = \bigcup_{B \subset MN} T(B).$$

Für $t \in T(B)$ folgt

$$z(t) = c_B(t)^T A_B(t)^{-1} b(t),$$

woraus sich der folgende Satz ergibt.

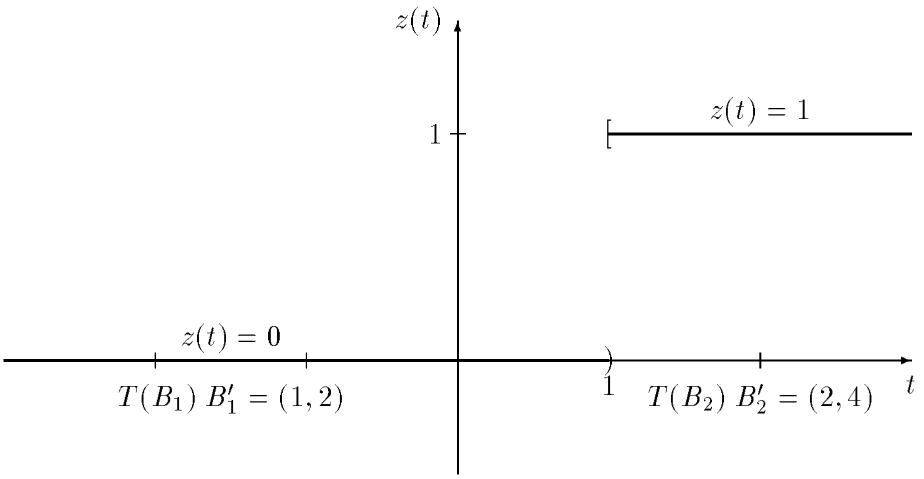
Satz 9.3 *$z : T \to \boldsymbol{R}$ ist auf jedem Optimalitätsbereich eine rationale Funktion.*

Offenbar ist z im allgemeinen nicht mehr stetig auf T. Für $t \in T$, $\mathcal{B} := \{B \mid t \in T(B)\}$, ist z jedoch stetig auf $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} T(B)$.

Beispiel zu einparametrischen Restriktionen:

$$\begin{array}{rlcccl} \text{z(t)} = & \max & & & y & \\ & \text{unter} & x & + & y & \leq 1 \\ & & x & + & ty & \geq 1 \\ & & & & x, y & \geq 0 \end{array}$$

1. Fall: $t < 1$ Annahme: $y > 0 \Rightarrow 1 \leq x + ty < x + y \leq 1$ (Widerspruch)
$\Rightarrow$ $y = 0 \Rightarrow x = 1$.
2. Fall: $t \geq 1$ $\Rightarrow$ $x = 0, \ y = 1$ optimal, zulässig.



Einparametrische Probleme mit Parametern in allen Koeffizienten lassen sich mit Verfahren lösen, die etwas komplexer aber ähnlich zu den Verfahren für Parameter in Kosten oder Resourcen sind. Einige Literatur zu solchen Verfahren sei hier genannt:

Finckelstein / Gumenak: Algorithm for Solving a linear parametric program when the A-matrix depends on a parameter, Ekon. i. Mat. Met. 13 (1977) 342–347,

Weickenmeyer, E.: Ein Algorithmus zur systematischen und vollständigen Lösung eines parametrischen Linearen Programms mit einem Parameter in allen Koeffizienten ZOR 22 (1978) 131–149,

Valiahö, H.: A Procedure for one-parametric LP, Bit 19 (1979) 256–269.

Beispiel:

$$\begin{array}{rlrcrcl} z(t) = & \max & -3x_1 & + & 2x_2 & & \\ & \text{unter} & x_1 & + & (1+t)x_2 & \leq & 1 \\ & & 2x_1 & - & (1+t)x_2 & \leq & 4 \\ & & & & x & \geq & 0 \end{array}$$

$\underline{t = 0}$

		x_1	x_2
	0	-3	2
x_3	1	-1	$-(1+t)$
x_4	4	-2	$1+t$

$\longrightarrow$

		x_1	x_3
	$\frac{2}{1+t}$	$\frac{-5-3t}{1+t}$	$-\frac{2}{1+t}$
x_2	$\frac{1}{1+t}$	$-\frac{1}{1+t}$	$-\frac{1}{1+t}$
x_4	5	-3	-1

$\underline{t = -1}$
Da x_2 unbeschränkt, ist die Aufgabe unbeschränkt nach oben.

$B = (2,4)$ ist optimal für $t = 0$.
$x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{1+t}$, $z(t) = \frac{2}{1+t}$.
Untersuchung von $T(B)$:
$x_B(t) \geq 0$ und $A_B(t)$ regulär genau dann, wenn $t > -1$.
Da für diese Parameterwerte $\tilde{c}_N(t) < 0$ gilt, folgt $T(B) = (-1, \infty)$.

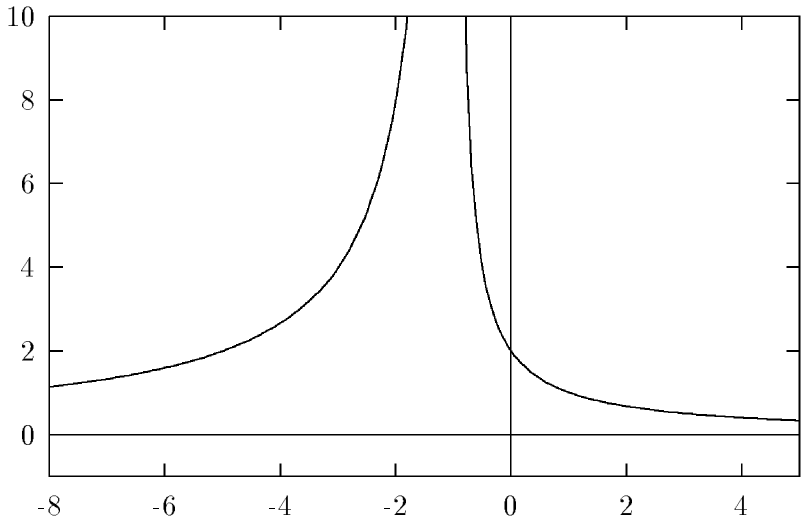
$\underline{t < -1}$

Ein Pivotschritt mit a_{22} führt auf:

		x_1	x_4
	$-\frac{8}{1+t}$	$\frac{1-3t}{1+t}$	$\frac{2}{1+t}$
x_3	5	-3	-1
x_2	$\frac{-4}{1+t}$	$\frac{2}{1+t}$	$\frac{1}{1+t}$

$B' = (2,3)$ ist optimal auf $(-\infty, -1)$, denn:
$x_{B'}(t)$ zulässig, $x_{B'}(t)$ optimal, $A_{B'}(t)$ regulär.
$z(t) = -\frac{8}{1+t}$.

$z\colon T \to \boldsymbol{R}$ ist weder konvex, noch, eingeschränkt auf Optimalitätsbereiche $T(B)$, linear. Die Optimalitätsbereiche $T(B), T(B')$ sind nicht abgeschlossen; T ist weder konvex noch abgeschlossen.



Anhang A

Simplexverfahren und duale Programme

Im folgenden sollen kurz die wesentlichen Grundlagen der Behandlung linearer Optimierungsaufgaben und ihrer Lösung mit Hilfe des Simplexverfahrens dargestellt werden.

Zur Entscheidungsfindung werden häufig lineare Modelle herangezogen. Als Beispiel modellieren wir in sehr vereinfachter Weise Überlegungen zur Auswahl weiblicher und männlicher Anfänger an einer amerikanischen Privatschule:

Zugangsregelung an einer Privatschule

Die Schule kann nur eine begrenzte Anzahl (≤ 500) Anfänger aufnehmen und versucht, durch gezielte Auswahl die Einnahmen zu maximieren. Einige Erfahrungs- und Grenzwerte, die für männliche und weibliche Schüler durchaus unterschiedlich ausfallen, kann man tabellarisch erfasssen:

	Qualifikation nach Test	Ehemaligenbeitrag in \$	Schäden in \$	Lehrkosten in \$
männlich	1200	8000	200	2400
weiblich	1300	3000	100	2000
Forderungen	$\bigcap \geq 1250$	$\sum \geq 2500000$	$\sum \leq 85000$	$\downarrow$
durch	Lehrerschaft	Präsident	Schatzmeister	min

Geht man von x männlichen und y weiblichen Anfängern aus, so lassen sich die Kenntnisse und Forderungen in einem linearen Modell zusammenfassen:

$$
\begin{array}{lrcrcrl}
\max & 2400x & + & 2000y & & & \\
\text{unter} & 8000x & + & 3000y & \geq & 2500000 & \\
 & 200x & + & 100y & \leq & 85000 & \\
 & x & + & y & \leq & 500 & \\
 & & & \dfrac{1200x+1300y}{x+y} & \geq & 1250 & \rightsquigarrow \quad -50x+50y \geq 0 \\
 & & & x \geq 0,\ y \geq 0 & & &
\end{array}
$$

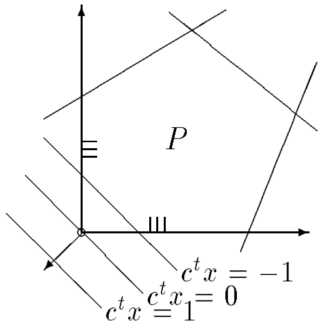


Abbildung A.1: Darstellung des Polyeders $P := \{x \mid Ax \leq b,\ x \geq 0\}$

Simplexverfahren und duale Programme

Lineare Modelle ("Lineare Programme, LP") werden gewöhnlich in zwei verschiedenen aber äquivalenten Formen untersucht. In der *Kanonischen Form*

$$\max\{c^T x | Ax \leq b, x \geq 0\}$$

mit $m + n$ Ungleichungen und n Variablen und in der *Standardform*

$$\max\{c^T x | Ax = b, x \geq 0\}$$

mit m Ungleichungen, n Gleichungen und Variablen. Fügt man in die nichttrivialen m

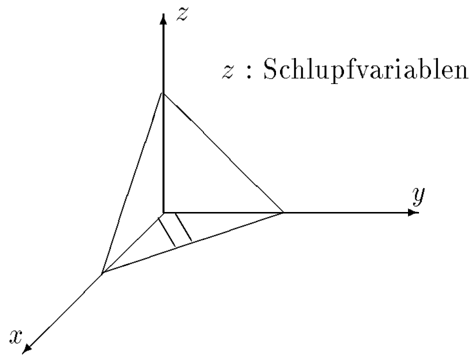


Abbildung A.2: kanonische Form:	$x + y \leq 1,$	$x, y \geq 0$
Standardform:	$x + y + z = 1,$	$x, y, z \geq 0$

Ungleichungen der kanonischen Form Schlupfvariablen ein, erhält man die Standardform.

Basis B

Wir bezeichnen einen Vektor $B = (B(1)\ B(2)\ \cdots\ B(m))$ von Spaltenindizes zu linear unabhängigen Spalten $\{A_{B(i)} \mid i = 1, \dots, m\}$ als *Basis*. Entsprechend heißen die Variablen $B(i)$, $i = 1, \dots, m$ Basisvariablen. Zur Abkürzung verwenden wir die Mengenschreibweise, z.B $j \in B$. Die übrigen Variablen mit $j \notin B$ heißen Nichtbasisvariable. Entsprechende Blöcke von Variablen, Konstanten oder Matrixspalten bezeichnen wir mit x_B, x_N, c_B, c_N, A_B, A_N.

Basislösung

Sei $K \in \{\boldsymbol{R}, \boldsymbol{Q}\}$. Ein Vektor $x \in K^n$ heißt Basislösung, falls $A_B x_B = b$, $x_N = 0$ für eine Basis B gilt. Die Basislösung heißt zulässig, falls $x_B = A_B^{-1} b \geq 0$.

Darstellung des Problems zur zulässigen Basis B

Das LP in Blockschreibweise

$$\begin{array}{lccccc} \max & c_B^T x_B & + & c_N^T x_N & & \\ \text{unter} & A_B x_B & + & A_N x_N & = & b, \\ & x_B \geq 0, & & x_N \geq 0 & & \end{array}$$

erlaubt uns die Auflösung nach den Basisvariablen $x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N$. Nach Elimination der Basisvariablen ergibt sich eine Darstellung, die nur von den Schlupfvariablen, den sogenannten unabhängigen Variablen abhängt:

$$\begin{array}{lcccc} \max & c_B^T A_B^{-1} b & + & (c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N) x_N & & \\ \text{unter} & & & A_B^{-1} A_N x_N & \leq & A_B^{-1} b, \\ & & & x_N \geq 0 & & \end{array}$$

Entweder sind die aktuellen Koeffizienten der Nichtbasisvariablen nichtpositiv und eine Verbesserung der Zielfunktion ist unmöglich, oder es gibt einen positiven Koeffizienten und man kann versuchen, die Zielfunktion zu verbessern, indem man die entsprechende Nichtbasisvariable vergrößert. Systematisch geht man die folgenden Punkte durch:

1. *Optimalität*: Falls $c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N \leq 0$ stop, da $x_N = 0$ optimal. Dann berechne die Optimallösung $x_N = 0$, $x_B = A_B^{-1} b$ mit Optimalwert $= c_B^T A_B^{-1} b$.

2. *Lokale Verbesserung*: Wähle den maximalen Koeffizienten

$$\tilde{c}_{N(s)} := c_{N(s)} - c_B^T A_B^{-1} A_{N(s)} = \max_{1 \leq j \leq n} (c_{N(j)} - c_B^T A_B^{-1} A_{N(j)})$$

3. *Endlichkeit*: Falls $A_B^{-1} A_{N(s)} \leq 0$ stop, da Optimallösung nicht endlich.

4. *Austauschvariable*: Wähle maximales $x_{N(s)}$ mit

$$A_B^{-1} A_{N(s)} x_{N(s)} \leq A_B^{-1} b.$$

Es gelte "=" in der Komponente r.

5. *Basiswechsel*: Wir tauschen $B(r) \leftrightarrow N(s)$:

$$B(i) = \begin{cases} B(i) & i \neq r \\ N(s) & i = r \end{cases}, \qquad N(j) = \begin{cases} N(j) & j \neq s \\ B(r) & j = s \end{cases}.$$

Tableauform (–methode)

Die Koeffizienten der zu den unabhängigen Variablen gehörenden Darstellung kann man in einer Matrix, dem Tableau, zusammenfassen.

		N
	$c_B^T A_B^{-1} b$	$c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N$
B	$A_B^{-1} b$	$-A_B^{-1} A_N$

$\equiv (t_{ij})$, mit Zeilen $i = 0, \ldots, m$,
und Spalten $j = 0, \ldots, n$.

Der Austausch einer Basis- gegen eine Nichtbasisvariable führt auf eine neue Darstellung, deren Koeffizienten wir zeilenweise aus den geltenden Gleichungen ablesen. Mit $\bar{t}_{ij}$ bezeichnen wir die neuen Koeffizienten. Jeder Zeile entspricht eine Gleichung der Form

$$x_{B(i)} = t_{i0} + \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_{N(j)}$$

1. Fall: $i = r$. In der *Pivotzeile* genügt es, durch das *Pivotelement* t_{rs} zu dividieren:

$$\begin{aligned} x_{B(r)} &= t_{r0} + t_{rs} x_{N(s)} + \textstyle\sum_{j \neq s} t_{rj} x_{N(j)} \\ \underbrace{\frac{1}{t_{rs}}}_{\bar{t}_{rs}} x_{B(r)} &= \underbrace{\frac{t_{r0}}{t_{rs}}}_{\bar{t}_{r0}} + x_{N(s)} + \sum_{j \neq s} \underbrace{\frac{t_{rj}}{t_{rs}}}_{\bar{t}_{rj}} x_{N(j)}] \end{aligned}$$

Nun können wir nach $x_{N(s)}$ auflösen.

2. Fall: $i \neq r, i \neq 0$. In den übrigen Zeilen mit Ausnahme der Zielfunktionszeile eliminieren wir $x_{N(s)}$, indem wir $t_{is} x_{N(s)}$ abziehen:

$$x_{B(i)} - \underbrace{\frac{t_{is}}{t_{rs}}}_{\bar{t}_{rs}} x_{B(r)} + \sum_{j \neq s} \underbrace{(t_{ij} - \frac{t_{is} t_{rj}}{t_{rs}})}_{\bar{t}_{ij}} x_{N(j)} = \underbrace{\frac{t_{r0}}{t_{rs}}}_{\bar{t}_{r0}}$$

3. Fall: $i = 0$. In der Zielfunktionszeile muß $t_{0s} x_{N(s)}$ eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} & -t_{00} + t_{0s} x_{N(s)} + \sum_{j \neq s} t_{0j} x_{N(j)} \\ = & -\underbrace{(t_{00} - \frac{t_{0s} t_{r0}}{t_{rs}})}_{\bar{t}_{00}} - \underbrace{\frac{t_{0s}}{t_{rs}}}_{\bar{t}_{00}} x_{B(r)} + \sum_{j \neq s} \underbrace{(t_{0j} - \frac{t_{0s} t_{rj}}{t_{rs}})}_{\bar{t}_{0j}} x_{N(j)} \end{aligned}$$

Die Berechnung der neuen Koeffizienten bezeichnen wir als *Pivotoperation.* Der resultierende Algorithmus, das sogenannte Simplexverfahren, läßt sich wie folgt zusammenfassen:

Algorithmus 1.2 (Das Simplexverfahren mit Tableauberechnung)

Unter der Voraussetzung $b \geq 0$ soll eine optimale Lösung des linearen Programms in kanonischer Form

$$\max \left\{ c^T x \;\middle|\; Ax \leq b, \quad x \geq 0 \right\},$$

bestimmt werden. Dazu werden zunächst die Ausgangsdaten in geeigneter Weise zusammengefaßt:

$$(t_{ij}) := \begin{pmatrix} 0 & c^T \\ b & -A \end{pmatrix}, \qquad i = 0, \ldots, m, \quad j = 0, \ldots, n,$$

$$B := (n+1, \ldots, n+m), \qquad N := (1, \ldots, n).$$

Die Schritte einer Iteration des Verfahrens lauten:

1. **Optimalität:**
   Ist ein $t_{0j} > 0$, so gehe nach 2.
   Anderenfalls ist eine Optimallösung erreicht. Setze

   $$x_{B(i)} := t_{i0}, \quad i = 1, \ldots, m; \qquad x_{N(j)} := 0, \quad j = 1, \ldots, n; \qquad z := t_{00}$$

   Stop.

2. **Bestimmung der Austauschspalte** $N(j)$**:**
   Man wähle den Index s so, daß

   $$t_{0s} = \max_{j = 1, \ldots, n} t_{0j}.$$

3. **Endlichkeitskriterium:**
   Sind alle $t_{is} \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$, so existiert keine endliche Lösung. Stop.

4. **Bestimmung der Austauschzeile** $B(r)$**:**
   Man wähle den Index r so, daß

   $$\frac{t_{r0}}{-t_{rs}} = \min \left\{ \frac{t_{i0}}{-t_{is}} \mid t_{is} < 0, \, i = 1, \ldots, m \right\}.$$

   Gehe nach 5.

5. **Pivotoperation:**
   Vertausche die r-te Komponente von B mit der s-ten Komponente von N und setze

$$\begin{aligned}
\bar{t}_{rs} &:= \frac{1}{t_{rs}}; \\
\bar{t}_{rj} &:= -\frac{t_{rj}}{t_{rs}}, && \text{für } j = 0, \ldots, n,\ j \neq s; \\
\bar{t}_{is} &:= \frac{t_{is}}{t_{rs}}, && \text{für } i = 0, \ldots, m,\ i \neq r; \\
\bar{t}_{ij} &:= t_{ij} - \frac{t_{is}}{t_{rs}} t_{rj}, && \text{für } i = 0, \ldots, m,\ i \neq r \text{ und } j = 0, \ldots, n,\ j \neq s.
\end{aligned}$$

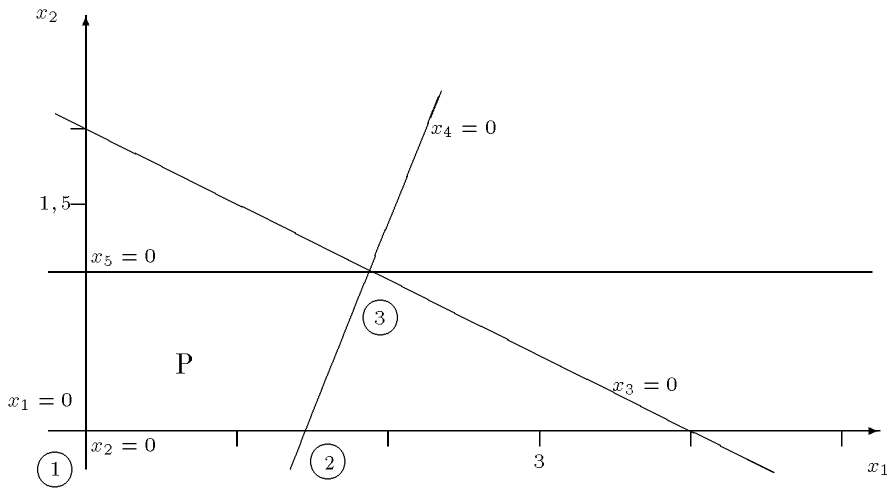
   Nun ersetze $t_{ij} := \bar{t}_{ij}$, $i = 0, \ldots, m$, $j = 0, \ldots, n$.
   Gehe nach 1.

Beispiel (Tableaumethode):

Bestimme eine optimale Lösung des linearen Programms

$$\begin{array}{llll}
\max & x_1 + x_2 & & \text{Schlupfvariable} \\
\text{unter} & x_1 + 2x_2 & \leq 4 & x_3 \\
 & 2x_1 - x_2 & \leq 3 & x_4 \\
 & x_2 & \leq 1 & x_5 \\
 & x_1,\ x_2 & \geq 0 &
\end{array}$$

Das Polyeder ist von folgender Gestalt:



1. Simplextableau:

		x_1	x_2
z	0	1	1
x_3	4	-1	-2
x_4	3	$-\boxed{2}$	1
x_5	1	0	-1

– zulässig, nicht optimal
– Pivot: $s = 1$, $r = 2$

2. Simplextableau:

		x_4	x_2
z	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
x_3	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$
x_1	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_5	1	0	$-\boxed{1}$

– zulässig, nicht optimal
– Pivot: $s = 2$, $r = 3$

3. Simplextableau:

		x_4	x_5
z	3	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$
x_3	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
x_1	2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
x_2	1	0	-1

– zulässig, optimal
– entartete Lösung, da $x_3 = 0$:
$x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ z = 3.$

Das Verfahren ist in dieser Form nicht notwendigerweise endlich, da man in Entartungsfällen in einem Zyklus sich wiederholender Basen stehenbleiben kann. Durch Zusatzregeln läßt sich aber die Endlichkeit des Verfahrens erzwingen. Dann ergibt sich aus den Abbruchmöglichkeiten des Simplexverfahrens der folgende Satz:

Satz 1.4 *Für (kanonische) LP gilt eine der folgenden strengen Alternativen:*

(1) $P = \emptyset$.

(2) $c^T x$ *ist nach oben unbeschränkt.*

(3) es existiert eine optimale Basis mit $c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N \leq 0$.

Duale LP

In der Theorie der linearen Optimierung spielen die Dualisierbarkeit linearer Programme und die Eigenschaften zueinander dualer Aufgaben eine wichtige Rolle. In kanonischer Formulierung bezeichnet man die folgenden Aufgaben als dual zueinander:

$$\begin{array}{llcl c llcl} \max & c^T x & & & & \min & y^T b & & \\ \text{unter} & Ax & \leq & b & \leftrightarrow & \text{unter} & y^T A & \geq & c^T \\ & x & \geq & 0 & & & y & \geq & 0 \end{array}$$

Zu jeder linearen Aufgabe kann man per Transformation auf kanonische Form die zugehörige duale Aufgabe finden. Für die Standardform ergibt sich:

$$\begin{array}{lllcl c lllcl} (I) & \max & c^T x & & & & (II) & \min & y^T b & & \\ & \text{unter} & Ax & = & b & \leftrightarrow & & \text{unter} & y^T A & \geq & c^T \\ & & x & \geq & 0 & & & & & & \end{array}$$

Die Lösungen dualer Aufgaben stehen in enger Beziehung miteinander:

Lemma 1.5 (Schwache Dualität) *Aus* $x \in P, y \in D$ *folgt* $c^T x \leq y^T A x \leq y^T b$.

Satz 1.6 (Dualitätssatz) *Besitzt eines der zueinander dualen LP eine endliche Optimallösung, so auch das jeweils andere. Dann sind die Optimalwerte gleich.*

Beweis. (I) besitze eine optimale Basis B. Aus

$$0 \geq c_N^T - \underbrace{c_B^T A_B^{-1}}_{=:\pi^T} A_N \ \wedge \ 0 = c_B^T - c_B^T A_B^{-1} A_B$$

folgt $\pi^T A \geq c^T$, d.h. π ist dual zulässig. Der Wert der vorliegenden primalen ($A_B^{-1}b$) und dualen (π) Lösungen stimmt überein: $c_B^T A_B^{-1} b = \pi^T b$. Wegen des schwachen Dualitätslemmas müssen beide Lösungen optimal sein. □

Die Übereinstimmung der Optimalwerte dualer Aufgaben hat viele Konsequenzen. Ein Beispiel ist der

Satz 1.7 (Komplementaritätssatz) *Seien $x \in P, y \in D$. Dann sind x, y Optimallösungen genau dann, wenn*

$$x_j > 0 \implies (y^T A)_j = c_j$$

für alle $j = 1, \ldots, n$.

Auch lineare Systeme von Gleichungen und Ungleichungen lassen sich entsprechend "dualisieren:"

Satz 1.8 (Strenger Alternativsatz) *Entweder (1) gibt es ein $x \in K^n : \ Ax = b, \ x \geq 0$ oder (2) es gibt ein $y \in K^m : \ y^T A \geq 0, \ y^T b < 0$. Beides zugleich ist unmöglich.*

Beweis. Falls x (1) und y (2) erfüllt, so folgt der Widerspruch $0 \leq y^T A x = y^T b < 0$. Angenommen (1) ist nicht lösbar. Sei OBdA $b \geq 0$. Dann besitzt die Aufgabe

$$\max\{-1^T u | Ax + u = b, x \geq 0, u \geq 0\} = \gamma < 0$$

die zulässige Lösung $u = b, x = 0$ und ihre Zielfunktion ist durch 0 nach oben beschränkt. Nach Annahme ist der Optimalwert negativ. Nach Dualitätssatz ist das duale Problem ebenfalls lösbar:

$$\min\{y^T b | y^T A \geq 0^T, y^T I \geq -1^T\} = \gamma$$

und für die Optimallösung y_* gilt: $y_*^T b = \gamma < 0, y_*^T A \geq 0^T$, d.h. y_* erfüllt (2). □

Über Aufgaben mit unbeschränkten Zielfunktionen sagt der Dualitätssatz unmittelbar nichts aus. Schwache Dualität und Strenger Alternativsatz führen jedoch auf

Satz 1.9 (Dualität bei unbeschränkten Problemen)
(1) Sei $P \neq \emptyset$. Dann gilt: $c^T x$ nach oben unbeschränkt $\Leftrightarrow$ $D = \emptyset$.
(2) Sei $D \neq \emptyset$. Dann gilt: $y^T b$ nach unten unbeschränkt $\Leftrightarrow$ $P = \emptyset$.

Beweis. Da die Aussagen dual zueinander sind, genügt es (2) zu zeigen. Ist $P \neq \emptyset$, so folgt aus der schwachen Dualität, daß $y^T b$ nach unten beschränkt ist.

Sei nun $P = \emptyset$. Nach Alternativsatz gibt es ein $y \in K^m$ mit $y^T b < 0, y^T A \geq 0^T$. Sei $\bar{y} \in D$. Dann gilt auch $\bar{y} + \lambda y \in D$ für alle $\lambda \geq 0$. Nun zeigt

$$(\bar{y} + \lambda y)^T b \searrow_{\lambda \to \infty} -\infty,$$

daß die Zielfunktion nach unten unbeschränkt ist. □

Anhang B

Trennungssätze

Trennungssätze und Alternativsätze, wie im vorangegangenen Abschnitt, stehen in engem Zusammenhang. Bei linearen Systemen genügen die Eigenschaften der rationalen Zahlen, um entsprechende Sätze abzuleiten. Bei nichtlinearen Aufgaben ist dies nicht mehr möglich, hier benötigen wir die Trennungseigenschaften der reellen Zahlen. Daher sollen diese wichtigen Sätze separat in diesem Teil des Anhangs behandelt werden.

Trennung mittels Hyperebenen

Eine Hyperebene H legen wir durch $H := \{x | a^T x = \alpha\}$ für ein $a \neq 0, \alpha \in \boldsymbol{R}$ fest. Die Hyperebene H *trennt* $A, B \subseteq \boldsymbol{R}^n$, falls

$$a^T x \leq \alpha \leq a^T y \quad \forall x \in A,\ y \in B.$$

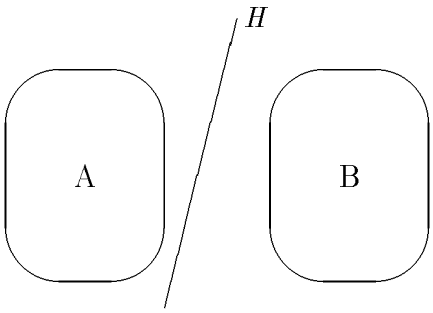


Abbildung B.1: Trennung mittels Hyperebenen

Wir sprechen von "echter" Trennung, falls eine der Ungleichungen strikt ist. In einer Mengenschreibweise können wir dies durch $A \subseteq H_{\leq}, B \subseteq H_{\geq}$ bzw. bei strikter Trennung durch $B \subseteq H_{>}$ ausdrücken.

Satz 2.10 (Strikte Punkt-Menge-Trennung) *Sei $C \subseteq \boldsymbol{R}^n$ konvex, $y \in \boldsymbol{R}^n \setminus \bar{C}$. Dann existiert eine Hyperebene H durch y, so daß $C \subseteq H_{>}$.*

Beweis. Sei $\| x \| := (x^T x)^{\frac{1}{2}}$ die Euklidische Norm. Dann gilt $0 < \inf_{x \in C} \| x - y \| =: \delta$.

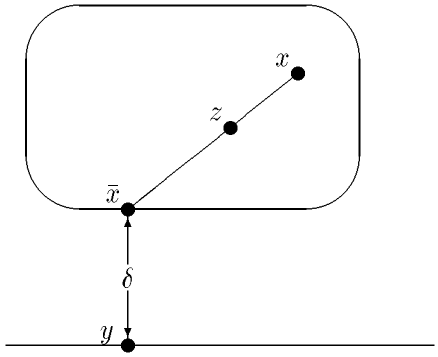


Abbildung B.2: Zur Trennung von Punkt und konvexer Menge

Die durch $f(x) := \| x - y \|$ gegebene Funktion ist stetig und daher $\bar{C} \cap \{x | f(x) \leq 2\delta\}$ kompakt. Also wird das Infimum in einem Punkt $\bar{x} \in \bar{C}$ mit $\| \bar{x} - y \| = \delta$ angenommen. Sei $x \in C$ beliebig. Da mit C auch $\bar{C}$ konvex ist, folgt $z = \bar{x} + \lambda(x + \bar{x}) \in \bar{C}$ für alle $0 \leq \lambda \leq 1$. Also gilt $f(z) \geq f(\bar{x})$, d.h.

$$\begin{aligned} \| \bar{x} + \lambda(x - \bar{x}) - y \|^2 &\geq \| \bar{x} - y \|^2, \\ 2\lambda(x - \bar{x})^T(\bar{x} - y) + \lambda^2 \| x - \bar{x} \|^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Nach Division durch λ und Grenzübergang $\lambda \to 0_+$ erhalten wir

$$x^T \underbrace{(\bar{x} - y)}_{=:a} \geq \bar{x}^T(\bar{x} - y) = \underbrace{(\bar{x} - y)^T(\bar{x} - y)}_{\delta^2} + \underbrace{y^T(\bar{x} - y)}_{=:\alpha} > \alpha$$

d.h. für die Hyperebene $H := \{x | x^T a = \alpha\}$ gilt $y \in H, C \subseteq H_>$ □

Stützhyperebene

Eine Hyperebene H heißt *Stützhyperebene* von $C \subseteq \boldsymbol{R}^n$, falls $H \cap \bar{C} \neq \emptyset$ und $C \subseteq H_\geq$.

Satz 2.11 (Trennung durch Stützhyperebene) *Sei $C \subseteq \boldsymbol{R}^n$ konvex, $y \in (\bar{C} \setminus \mathring{C})$. Dann existiert eine Stützhyperebene von C durch y.*

Beweis. Sei $y_k \to y$ mit $y_k \notin \bar{C}$. Nach Satz 2.10 gibt es $H_k := \{x | a_k^T x = \alpha_k\}$ mit $a_k^T y_k = \alpha_k < a_k^T x$ für alle $x \in C$. Sei oBdA $\| a_k \| \equiv 1$. Da $\{a_k\}_k$ beschränkt, gibt es eine konvergente Teilfolge, oBdA $a_k \overset{k \to \infty}{\to} a$. Dann gilt:

$$\alpha := a^T y = \lim_{k \to \infty} a_k^T y_k \leq \lim_{k \to \infty} a_k^T x = a^T x.$$

Also $y \in H := \{x | a^T x = \alpha\}$, $C \subseteq H_\geq$. □

Satz 2.12 (Trennung konvexer Mengen) *Seien C, D disjunkte, nichtleere, konvexe Teilmengen des $\boldsymbol{R}^n$. D sei offen. Dann existiert eine Hyperebene H mit $C \subseteq H_{\leq}$, $D \subseteq H_{>}$.*

Beweis. $B := \{y - x | x \in C, y \in D\}$. Dann gilt:

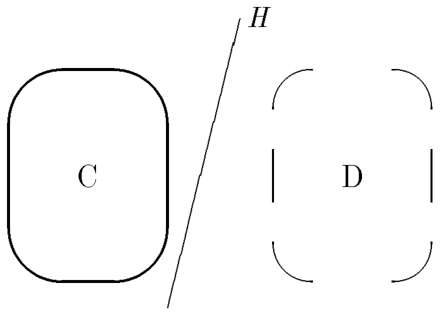


Abbildung B.3: Zum Beweis der Trennung konvexer Mengen

(1) B ist offen, denn $B = \bigcup_{x \in C} \{y - x | y \in D\}$;

(2) B ist konvex, wie man leicht nachrechnet;

(3) $0 \notin B$, denn $C \cap D = \emptyset$.

Nun können wir mit einer Hyperebene $H = \{z | a^T z = 0\}$ durch 0 den Vektor 0 und die Menge B nach Satz 2.10 und Satz 2.11 trennen. Dann gilt

$$a^T (y - x) \geq 0 \quad \forall x \in C, y \in D \tag{2.1}$$

$\beta := \inf\{a^T y | y \in D\} \in \boldsymbol{R}$ existiert, da $C \neq \emptyset$ nach (2.1) Schranken liefert. Da D offen ist, folgt

$$a^T y > \beta \geq a^T x \quad \forall x \in C, y \in D$$

d.h. die trennende Hyperebene ist durch $\{x \mid a^T z = \beta\}$ gegeben. □

Wir können aus diesen Sätzen nun nochmals einen Alternativsatz für lineare Systeme ableiten, diesmal sogar für reelle Koeffizienten aber andererseits auch nur bezüglich der Existenz reeller Lösungen. Selbst wenn rationale Koeffizienten vorliegen, kann man mit dem folgenden Satz also nicht unmittelbar auf die alternative Existenz der entsprechenden rationalen Vektoren schließen.

Satz 2.13 (Strenger Alternativsatz)
Entweder (1) gibt es ein $x \in \boldsymbol{R}^n$ mit $Ax = b$, $x \geq 0$ oder (2) es gibt ein $y \in \boldsymbol{R}^m$ mit $y^T A \geq 0$, $y^T b < 0$. Beides zugleich ist unmöglich.

Beweis. Der Nachweis der strengen Alternative erfolgt wie im Beweis des Alternativsatzes 1.8. Der Kegel $K(A) = \{Ax | x \geq 0\}$ ist konvex und abgeschlossen. Annahme: $b \notin K(A)$.

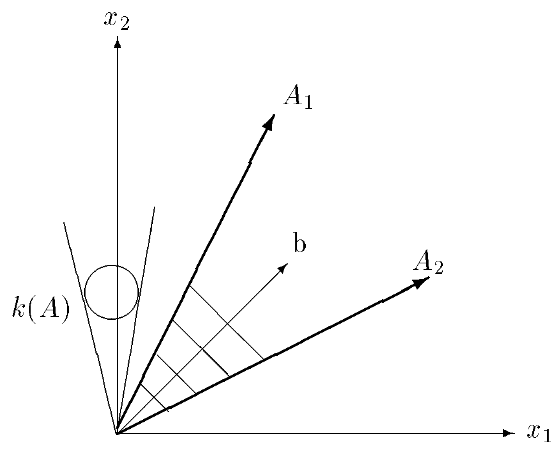


Abbildung B.4: Zum Beweis des Alternativsatzes

Wähle ϵ mit

$$K(A) \cap U_\epsilon(b) = K(A) \cap \{u| \parallel u - b \parallel < \epsilon\} = \emptyset.$$

Sei $K_\epsilon := \{\lambda u | \lambda > 0, u \in U_\epsilon(b)\}$. Dann gilt

$$K_\epsilon \cap K(A) = \emptyset, \ K_\epsilon \text{ offen.}$$

Nach Satz 2.12 existiert eine Hyperebene $H = \{x | a^T x = \alpha\}$ mit

$$a^T x \leq \alpha < a^T z \quad \forall x \in K(a), z \in K_\epsilon. \tag{2.2}$$

Aus $0 \in K(A)$ und $\lambda b \in K_\epsilon$ für alle $\lambda > 0$, folgt $0 \leq \alpha < \lambda a^T b$ für alle $\lambda > 0$. Also muß $\alpha = 0$ gelten. Für $y := -a$ erhalten wir mit Hilfe der Ungleichung (2.2)

$$y^T A \geq 0, \quad y^T b < 0.$$

□

Literaturverzeichnis

[1] Ravindra K. Ahuja, Thomas L. Magnanti, and James B. Orlin. *Network Flows.* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1993.

[2] V. Chviátal. *Linear Programming.* W.H.Freeman and Company, New York, 1983.

[3] Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, and Ronald L. Rivest. *Introduction to Algorithms.* MIT Press, McGraw-Hill, Cambridge, London, 1990.

[4] Shimon Even. *Graph Algorithms.* Computer Science Press, 1979.

[5] Philip E. Gill, Walter Murray, and Margaret H. Wright. *Practical Optimization.* Academic Press, Inc., London, 1981.

[6] M. Gondran and M. Minoux. *Graphs and Algorithms.* John Wiley & Sons, Chichester, 1984.

[7] Martin Grötschel, László Lovász, and Alexander Schrijver. *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization.* Springer, Berlin, 1988.

[8] D. Jungnickel. *Graphen, Netzwerke und Algorithmen.* BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, 2 edition, 1990. 2. überarbeitete und erweiterte Auflage.

[9] Eugene L. Lawler. *Combinatorial Optimization: Networks and Matroids.* Holt, Rinehart and Winston, New York, 1976.

[10] J. Leeuven, v. *Algorithms and Complexity.* Elsevier, Amsterdam, 1990.

[11] Th. Lengauer. *Combinatorial Algorithms for Integrated Circuit Layout.* John Wiley & Sons, Chichester, 1990.

[12] Kurt Mehlhorn. *Data Structures and Algorithms: 3. Multidimensional Searching and Computational Geometry.* Springer, Berlin, 1984.

[13] M. Minoux. *Mathematical Programming, Theory and Algorithms.* John Wiley & Sons, Chichester, 1986.

[14] B. M. E. Moret and H. D. Shapiro. *Algorithms from P to NP.* Benjamin Cummings, Redwood City, 1991.

[15] Katta G. Murty. *Network Programming.* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1992.

[16] K.G. Murty. *Linear Programming.* John Wiley & Sons, New York/Chichester, 1983.

[17] K.G. Murty. *Linear Complementarity, Linear and Nonlinear Programming.* Heldermann, Berlin, 1988.

[18] George L. Nemhauser and Laurence A. Wolsey. *Integer and Combinatorial Optimization.* John Wiley & Sons, Chichester, 1988. Wiley Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization.

[19] G.L. Nemhauser, A.H.G. Rinnooy Kan, and M.J. Todd. *Optimization.* North-Holland, Amsterdam, 1989.

[20] Christos H. Papadimitriou and Kenneth Steiglitz. *Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity.* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1982.

[21] R. G. Parker and L. R. Rardin. *Discrete Optimization.* Academic Press, London, 1988.

[22] H.M. Salkin and K. Mathur. *Foundations for Integer Programming.* North-Holland, New York, 1989.

[23] Alexander Schrijver. *Theory of Linear and Integer Programming.* John Wiley & Sons, Chichester, 1986.

[24] J. Stoer. *Einfuehrung in die Numerische Mathematik I.* Springer, Berlin, 1989.