Lineare und Diskrete Optimierung

Manuskript zur Vorlesung

WS 1996/1997

Uwe Zimmermann
Abteilung Mathematische Optimierung
Technische Universität Braunschweig

Braunschweig, den 1. Oktober 1996

Inhaltsverzeichnis

Kapitel I

Lineare Optimierung

1 Faktorisierungstechniken

Für eine kurze Einführung in die Lineare Optimierung und das Simplexverfahren sei auf den Anhang verwiesen. Die dort dargestellten Resultate sind notwendig für das Verständnis der folgenden Kapitel und werden im weiteren als bekannt vorausgesetzt.

In allen Implementationen des Simplexverfahrens werden Faktorisierungstechniken bei Speicherung und Aktualisierung der jeweiligen Basismatrix eingesetzt, die die Struktur der zugrundeliegenden Restriktionen ausnutzen, um Speicherplatz und Rechenzeit zu sparen. Insbesondere die heute in den Anwendungen dominierenden großen Probleme ($>$ 10.000 Restriktionen, $>$ 1.000.000 Variable) mit dünnbesetzten, strukturierten Restriktionsmatrizen sind ohne diese Techniken nicht lösbar. Um dies einzusehen, muß man nur einmal versuchen, mit einem Programm zur Auflösung linearer Gleichungssysteme ein vollbesetztes System mit 100.000 Variablen zu lösen. Solche Probleme bestimmen als wesentlicher Teil jeder Iteration des Simplexverfahrens dessen Aufwand.

Wir erinnern zunächst an einige grundlegende Eigenschaften von regulären Matrizen. $E_1, E_2, \ldots, E_m$ bezeichnen die Spalten der Einheitsmatrix E.

F(robenius)–Matrizen

Reguläre Matrizen der Form

$$F_r(d) := \begin{bmatrix} 1 & & & * & & & \\ & \ddots & & * & & & \\ & & 1 & * & & & \\ & & & * & & & \\ & & & * & 1 & & \\ & & & * & & \ddots & \\ & & & * & & & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \; r\text{–te Zeile,} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

die sich nur in einer Spalte (oder Zeile) d von der Einheitsmatrix unterscheiden, heißen *Frobeniusmatrizen* oder kurz *F-Matrizen*.

Die Inverse einer F-Matrix ist eine Matrix gleicher Form, es gilt: $F_r(d)^{-1} = F_r(d')$ mit

$$d'_i := \begin{cases} \dfrac{1}{d_r} & : i = r \\ -\dfrac{d_i}{d_r} & : i \neq r \end{cases}$$

Offenbar gilt $F_r(d')d = E_r$. Die Gausselimination für reguläre Matrizen kann durch eine Folge geeigneter F-Matrizen mit unterer Dreiecksform realisiert werden, wenn die auftretenden Diagonalelemente d_r nicht verschwinden. Anderenfalls muß man mit Hilfe von Zeilenvertauschungen nichtverschwindenden Diagonalelemente, die man auch als Pivotelemente bezeichnet, erzwingen. Numerisch stabile Versionen verwenden entsprechende Pivotauswahlregeln. Zeilen- und Spaltenvertauschungen kann man durch Permutationsmatrizen beschreiben.

Permutationsmatrizen

Eine Permutation π können wir als Indexvektor auffassen, $\pi = (\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(m))$. Dann bezeichnet $P := E_\pi$ die entsprechende *Permutationsmatrix*. Zu $\pi = (3, 1, 4, 2)$ gehört die Permutationsmatrix

$$P := E_\pi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Bemerkung: A sei eine $m \times m$-Matrix. Permutationsmatrizen $P = E_\pi = [E_{\pi(1)}, \ldots, E_{\pi(m)}]$ haben eine Reihe einfacher, nützlicher Eigenschaften:

1. $P_{ij} = 1 \leftrightarrow i = \pi(j) \leftrightarrow \pi^{-1}(i) = j$,
2. $P^T = E_{\pi^{-1}}$,
3. $AP = [A_{\pi(1)}, \ldots, A_{\pi(m)}]$,
4. $E_\pi E_\varrho = E_{\pi \circ \varrho}$,
5. $P^T = P^{-1}$,
6. $P^{-1}A = P^T A = [A^T P]^T = \begin{bmatrix} a_{\pi(1)} \\ \vdots \\ a_{\pi(m)} \end{bmatrix}$, wobei a_i die i-te Zeile von A bezeichnet.

Dreiecksmatrizen

Matrizen der Form

$$L = \begin{bmatrix} * & & & & & & \\ * & * & & & & & \\ * & * & * & & & & \\ * & * & * & * & & & \\ * & * & * & * & * & & \\ * & * & * & * & * & * & \\ * & * & * & * & * & * & * \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * & * \\ & * & * & * & * & * & * \\ & & * & * & * & * & * \\ & & & * & * & * & * \\ & & & & * & * & * \\ & & & & & * & * \\ & & & & & & * \end{bmatrix}$$

heißen untere bzw. obere Dreiecksmatrizen. Jede reguläre Matrix läßt sich, möglicherweise nach geeigneten Zeilenpermutationen, als Produkt zweier Dreiecksmatrizen darstellen. Wir können dabei verlangen, daß die Diagonale eine der beiden Matrizen nur mit 1-Elementen besetzt ist. Im folgenden werden wir dies OBdA für U annehmen. Die Gültigkeit des folgenden Satzes ergibt sich aus der Durchführbarkeit der Gausselimination mit Spaltenpivotsuche (siehe etwa in Stoer [24]):

Satz 1.1 (LU-Zerlegung) *Sei A reguläre $m \times m$ Matrix. Dann existieren Permutationsmatrizen $P_1, \ldots, P_m$, sowie Frobeniusmatrizen $L_1, \ldots, L_m$, (untere Dreiecksform) $U_1, \ldots, U_m$ (obere Dreiecksform) mit*

$$L_m P_m \ldots L_1 P_1 A = U_m \ldots U_1$$

Die in der Faktorisierung auftretenden Matrizen haben also die Form

$$L_j = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & * & & & \\ & & * & 1 & & \\ & & * & & \ddots & \\ & & * & & & 1 \end{bmatrix}, \quad U_j = \begin{bmatrix} 1 & & * & & & \\ & \ddots & * & & & \\ & & 1 \; * & & & \\ & & * & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Das Produkt der unteren Dreiecksmatrizen ist wieder eine untere Dreiecksmatrix, es gilt $U := U_m U_{m-1} \ldots U_1 = [u_1, u_2, \ldots, u_m]$, wobei u_j die j-te Spalte der Matrix U_j bezeichnet. Dies kann man sich leicht induktiv überlegen, denn mit $V_j := [E_1, \ldots, E_j, u_{j+1}, \ldots, u_m]$ gilt:

$$V_jU_j = \begin{bmatrix} 1 & & & * & * & * & * \\ & \ddots & & * & * & * & * \\ & & 1 & * & * & * & * \\ & & & * & * & * & * \\ & & & & * & * & * \\ & & & & & * & * \\ & & & & & & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & * & & & \\ & \ddots & & * & & & \\ & & 1 & * & & & \\ & & & * & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} = V_{j-1}.$$

Ansatz zur Faktorisierung der Basismatrix A_B

Ähnlich wie in Satz 1.1 wird die in einer Iteration des Simplexverfahrens vorliegende Basismatrix A_B als Produkt von Permutationsmatrizen $Q, R, P_\varrho, \ldots, P_1$, unteren Dreiecks-Frobeniusmatrizen $L_\varrho, \ldots, L_1$ mit maximal einem nichtverschwindenden Nichtdiagonalelement der Form (im folgenden als L-Faktoren bezeichnet):

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & * & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & * & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix},$$

sowie oberen Dreiecks-Frobeniusmatrizen $U_1, \ldots, U_m$ dargestellt, so daß gilt

$$L_\varrho P_\varrho \ldots L_1 P_1 A_B = Q U_m \ldots U_1 R \tag{1.1}$$

Die Lösung der in allen Formen des revidierten Simplexverfahrens auftretenden drei Gleichungssysteme

$$A_B x_B := b; \quad \pi^T A_B := c_B^T; \quad A_B \tilde{A}_{N(s)} := A_{N(s)} \tag{1.2}$$

kann in Kenntnis der Faktorisierung (1.1) effizient durchgeführt werden. Man geht jeweils in zwei Schritten vor. In einem Schritt muß ein Gleichungssystem mit Dreiecksstruktur gelöst werden, im anderen Schritt genügen einige Matrizenmultiplikationen. Beide Schritte haben also nur den Aufwand $O(m^2)$.

a) Bei $A_B x_B = b$:

1. Schritt: $w := Q^{-1} L_\varrho P_\varrho \ldots L_1 P_1 b$ (Matrixvektormultiplikationen),

2. Schritt: $U_m \ldots U_1 R x_B := w$ (Dreieckssystem lösen).

b) Bei $\pi^T A_B = c_B^T$:

1. Schritt: $v^T U_m \dots U_1 := c_B^T R^{-1}$ (Dreieckssystem lösen),

2. Schritt: $\pi^T := v^T Q^{-1} L_\varrho P_\varrho \dots L_1 P_1$ (Matrixvektormultiplikationen).

Wir verifizieren die Lösung nur für das transponierte System. Hier gilt:

$$\pi^T A_B = v^T Q^{-1} L_\varrho P_\varrho \dots L_1 P_1 A_B = v^T Q^{-1} Q U_m \dots U_1 R = v^T U_m \dots U_1 R = c_B^T.$$

Neue Faktorisierung bei Basiswechsel

Ist nun A_B ist nach (1.1) faktorisiert, so gilt es, nach Austausch der Basisvariablen $B(r)$ gegen die Nichtbasisvariable $N(s)$ die Faktorisierung zu aktualisieren. $\bar{B} := B \setminus B(r) \cup N(s)$ ist die neue Basis. Die neue Basismatrix unterscheidet sich daher von der alten Basismatrix nur in der r-ten Spalte:

$$A_B = [A_{B(1)}, \dots, A_{B(m)}] \overset{B(r) \longleftrightarrow N(s)}{\longrightarrow} A_{\bar{B}} = [A_{B(1)}, \dots, \underbrace{A_{N(s)}}_{\text{statt } A_{B(r)}}, \dots, A_{B(m)}]$$

Sei $F = F_r(d)$ mit $d := A_B^{-1} A_{N(s)}$. Dann ist $A_{\bar{B}} = A_B F$. Berücksichtigung der in der alten Faktorisierung vorliegenden Permutationsmatrix R führt auf eine geänderte Frobeniusmatrix $F_q(Rd) = RFR^T$. Damit ergibt sich die Matrix $V := URFR^T$, die nur in Spalte q verschieden von U ist:

$$V = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * & * \\ & * & * & * & * & * & * \\ & & * & * & * & * & * \\ & & * & * & * & * & * \\ & & * & & * & * & * \\ & & * & & & * & * \\ & & * & & & & * \end{bmatrix}.$$

Insbesondere gilt $V_q = URd =: w$. V muß nun auf untere Dreiecksform transformiert werden. Wähle dazu Permutationsmatrizen $\tilde{Q}, \tilde{R}$, so daß die resultierende Matrix nur in einer Zeile von der Dreiecksform abweicht:

$$\tilde{Q} V \tilde{R} = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * & * \\ & * & * & * & * & * & * \\ & & * & * & * & * & * \\ & & & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * \\ & & & & & * & * \\ & & & & & & * \end{bmatrix},$$

und wähle dann Permutationsmatrizen $\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_m$ sowie L-Faktoren $\tilde{L}_1, \ldots, \tilde{L}_m$, so daß

$$\tilde{L}_m \tilde{P}_m \ldots \tilde{L}_1 \tilde{P}_1 \tilde{Q} V \tilde{R} = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * & * \\ & * & * & * & * & * & * \\ & & * & * & * & * & * \\ & & & * & * & * & * \\ & & & & * & * & * \\ & & & & & * & * \\ & & & & & & * \end{bmatrix}.$$

Durch Wahl der Permutationsmatrizen $\tilde{Q}, \tilde{R}, \tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_m$ sind die zur Elimination notwendigen L-Faktoren festgelegt. Das folgende Lemma zeigt, daß in jedem Fall wieder eine neue Faktorisierung der Form (1.1) vorliegt.

Lemma 1.2 *Mit* $\bar{Q} := Q\tilde{Q}^T, \bar{R} := \tilde{R}^T R$ *und* $\bar{L}_j := \bar{Q}\tilde{L}_j\bar{Q}^T,\ \bar{P}_j := \bar{Q}\tilde{P}_j\bar{Q}^T$ *für alle* $i = 1, \ldots, m$ *gilt:*

$$\bar{L}_m \bar{P}_m \ldots \bar{L}_1 \bar{P}_1 L_m P_m \ldots L_1 P_1 A_{\bar{B}} = \bar{Q}\bar{U}\bar{R}.$$

Beweis. Sei $G := \bar{L}_m \bar{P}_m \ldots \bar{L}_1 \bar{P}_1$. Dann gilt

$$G = \bar{Q}\tilde{L}_m\bar{Q}^T\bar{Q}\tilde{P}_m\bar{Q}^T \ldots \bar{Q}\tilde{P}_1\bar{Q}^T = \bar{Q}\tilde{L}_m\tilde{P}_m \ldots \tilde{L}_1\tilde{P}_1\bar{Q}^T.$$

Für $H := L_m P_m \ldots L_1 P_1 A_{\bar{B}}$ folgt

$$H = (L_m P_m \ldots L_1 P_1 A_B)F = QURF = Q(URFR^T)R = QVR = \bar{Q}[\tilde{Q}V\tilde{R}]\bar{R}.$$

Die linke Seite der zu zeigenden Gleichung ist das Produkt GH. Also ergibt sich aus

$$GH = (\bar{Q}\tilde{L}_m\tilde{P}_m \ldots \tilde{L}_1\tilde{P}_1\bar{Q}^T)\bar{Q}[\tilde{Q}V\tilde{R}]\bar{R} = \bar{Q}\bar{U}\bar{R}$$

die Behauptung. □

Bemerkung:

1. Durch Wahl von $\tilde{Q}, \tilde{R}, \tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_m$ erhält man verschiedene Faktorisierungstechniken.

2. Man muß und kann die neuen Faktoren L_j, P_j ohne größeren Aufwand kompakt speichern.

3. Um Speicher zu sparen, dürfen nur die Nichtnullelemente der Faktoren $\bar{U}_j$ abgespeichert werden. Da sich Position und Anzahl der Nichtnullelemente bei der Aktualisierung ändern, ist bei Listenspeicherung eine weitgehende Neuspeicherung notwendig. Insbesondere bei sequentieller Speicherung außerhalb des schnellen Arbeitsspeichers wird dieser Teil der Aktualisierung sehr aufwendig.

Wahlvorschlag 1: Bartels/Golub (1969/71)

Wähle $\tilde{Q} = \tilde{R}^T, \tilde{R} = E_s$ mit $S = (1, 2, \ldots, q-1, q+1, \ldots, n, q)$. Dann weicht die erzeugte Matrix nur in der letzten Zeile von der gewünschten Dreiecksgestalt ab. Für $m = 5$ und $q = 2$ erhält man folgende Form:

$$\begin{bmatrix} 1 & w_1 & u_{13} & u_{14} & u_{15} \\ & w_2 & u_{23} & u_{24} & u_{25} \\ & w_3 & 1 & u_{34} & u_{35} \\ & w_4 & & 1 & u_{45} \\ & w_5 & & & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \tilde{Q}V\tilde{R} = \begin{bmatrix} 1 & u_{13} & u_{14} & u_{15} & w_1 \\ & 1 & u_{34} & u_{35} & w_3 \\ & & 1 & u_{45} & w_4 \\ & & & 1 & w_5 \\ & u_{23} & u_{24} & u_{25} & w_2 \end{bmatrix}.$$

Zur Sicherung der numerischen Stabilität wählt man mit Hilfe der Spaltenpivotregel der Gausselimination das jeweilige Pivotelement. Man vertauscht also die in Frage stehenden Zeilen, falls $|Subdiagonalelement| > |Diagonalelement|$. Im Beispiel ist etwa die 2-te mit der 5-ten Zeile zu vertauschen, falls $|u_{23}| > 1$. Dadurch sind die Permutationsmatrizen $\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_m$ und damit die L-Faktoren $\tilde{L}_1, \ldots \tilde{L}_m$ festgelegt.

Während das resultierende Verfahren numerisch sehr stabil ist, kann die in der Regel unberücksichtigte Anzahl der Nichtnullelemente in $\bar{U}$ rasch anwachsen. Eine Verbesserung dieses ungünstigen Verhaltens kann man durch Abschwächung der rigiden Spaltenpivotregel erzielen. Die neue Regel lautet:

a) Zeilenpermutation, falls $|Subdiagonalelement| > \alpha|Diagonalelement|$;

b) keine Zeilenpermutation, falls $|Diagonalelement| > \alpha|Subdiagonalelement|$;

c) andernfalls, Pivot in der Zeile mit weniger Nichtnullelementen wählen.

Der Faktor α schafft also Raum für eine Berücksichtigung des voraussichtlichen Anzahl neuer Nichtnullelemente, solange die numerische Stabilität nicht leidet. Typische Werte für diesen Faktor sind $\alpha = 10, 100$.

Wahlvorschlag 2: Forrest/Tomlin (1972)

Wähle $\tilde{Q}, \tilde{R}$ wie beim Vorschlag von Bartels und Golub, aber setze $P_i = E$ für alle i. Die Aktualisierung hat also die folgende Form:

$$\tilde{Q}V\tilde{R} \rightsquigarrow \tilde{L}_n\tilde{L}_{n-1}\ldots\tilde{L}_1(\tilde{Q}V\tilde{R}) = \begin{bmatrix} 1 & * & * & & * & * & * \\ & 1 & * & & * & * & * \\ & & 1 & & * & * & * \\ & & & \ddots & * & * & * \\ & & & & 1 & * & * \\ & & & & & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Offenbar bleibt die numerische Stabilität unberücksichtigt. Andererseits ist die Aktualisierung $U \to \bar{U}$ sehr schnell, da neue Nichtnullelemente sind nur in $\bar{U}_m$ möglich sind. Für weitere Informationen verweisen wir auf das Buch von Chvatal [2]. Ein Beispiel soll das resultierende Verfahren verdeutlichen.

Beispiel (Faktorisierung nach Forrest/Tomlin):

Wegen $\tilde{Q} = \tilde{R}^T$ gilt $Q = R^T$ im Algorithmus.

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & x_1 & + & x_2 & & \\ \text{unter} & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 \\ & 2x_1 & - & x_2 & \leq & 3 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\ & & & x & \geq & 0 \end{array}$$

Anfangsdaten:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \; c^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Ausgangsbasis $B_0 = (3 \quad 4 \quad 5)$ besitzt eine triviale Faktorisierung mit $\rho = 0, \quad A_{B_0} = U = R = E$. Daher findet man $x_{B_0} = b, \; \tilde{c}_{N_0} = c_{N_0}$, also etwa $s = 1, \; \tilde{A}_1 = A_1$, also $r = 2$.

Neue Basis: $B_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

$$A_{B_1} = A_{B_0} \cdot F \text{ mit } F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (q = r, \text{ da } R = E)$$

$$\Rightarrow V = U(RFR^T) = F.$$

Wahl von $\tilde{R}_1$

$$\tilde{R}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \tilde{R}_1^T V \tilde{R}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Partielle Pivotstrategie:

$$\tilde{L}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad U := \tilde{L}_1 \tilde{R}_1^T V \tilde{R}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mit $R := \tilde{R}_1^T, \quad L_1 := R^T \tilde{L}_1 R$ erhält man die Faktorisierung

$$L_1 A_{B_1} = R^T U R$$

Lösung von $A_{B_1} x_{B_1} = b$

$$w := R L_1 b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$w =: U R x_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \\ x_1 \end{pmatrix} \Rightarrow x_{B_1} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Lösung von $\pi^T A_{B_1} = c_{B_1}^T$

$$v^T U = v^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = c_{B_1}^T R^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi^T := v^T R L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{c}_4 & \tilde{c}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Also $s = 2$.

Lösung von $A_{B_1} \tilde{A}_2 = A_2$

$$w := R L_1 A_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Löse $U R \tilde{A}_2 := w \Rightarrow \tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, also etwa $r = 3, q = 2$.

Neue Basis $B_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$A_{B_2} = A_{B_1} F$ mit $F = \begin{pmatrix} E_1 & E_2 & \tilde{A}_2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow V = U\left(RFR^T\right) = \begin{pmatrix} U_1 & w & U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Wahl von $\tilde{R}_2$

$$\tilde{R}_2 := \tilde{R}_1 \Rightarrow \tilde{R}_2^T V \tilde{R}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Partielle Pivotstrategie

$$\tilde{L}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{L}_2 \tilde{R}_2^T V \tilde{R}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\tilde{L}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{L}_3 \tilde{L}_2 \tilde{R}_2^T V \tilde{R}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: U$$

Mit $R := \tilde{R}_2^T R = E$, $\tilde{L}_2 =: L_2$, $\tilde{L}_3 =: L_3$ erhält man die Faktorisierung $L_3 L_2 L_1 A_{B_2} = U$.

Lösung von $A_{B_2} x_{B_2} = b$

$$w := L_3 L_2 L_1 b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \; U x_{B_2} = w \Rightarrow x_{B_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung von $\pi^T A_{B_2} = c_{B_2}^T$

$$v^T U = c_{B_2}^R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{c}_4 & \tilde{c}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$, d.h. B_2 ist optimal.

Wahlvorschlag 3: Reid (1982)

Reid versucht in seinem Vorschlag, sowohl die entstehenden neuen Nichtnullelemente als auch die numerische Stabilität zu berücksichtigen. Die durch die Änderung der Basis entstehende Ausbuchtung der Dreiecksgestalt wird zunächst durch Wahl von $\tilde{Q}, \tilde{R}$ möglichst klein gehalten (*Beulenverkleinerung*). Dann wird bei der Transformation auf Dreiecksgestalt in $\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_m$ eine partielle Pivotstrategie berücksichtigt.

Bump (Beule)

Ist eine Matrix V außerhalb einer quadratischen Teilmatrix W eine obere Dreiecksmatrix, also von der Form

$$V = \begin{bmatrix} \boxed{W} \end{bmatrix}$$

so heißt W *Beule* von V. Ist in unserem $5*5-$Beispiel (siehe Abschnitt zu Bartels/Golub) $w_5 = 0$ und wählen wir $\tilde{Q} = \tilde{R}^T$, $S = (1,3,4,2,5)$, so resultiert eine verkleinerte Beule der Größe $3*3$:

$$\tilde{Q}V\tilde{R} = \begin{bmatrix} 1 & u_{13} & u_{14} & w_1 & u_{15} \\ & \mathbf{1} & \mathbf{u_{34}} & \mathbf{w_3} & u_{35} \\ & & \mathbf{1} & \mathbf{w_4} & u_{45} \\ & \mathbf{u_{23}} & \mathbf{u_{24}} & \mathbf{w_2} & u_{25} \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Nun wird in drei Phasen versucht, diese verkleinerte Beule noch weiter zu schrumpfen. Dabei werden wie schon zuvor Rotationen benutzt.

Isolierte Elemente in Beulen

Enthält eine Zeile/Spalte von W genau ein Nichtnullelement, so heißt dieses *isoliert*. Isolierte Elemente kann man mittels Zeilen- und Spaltenpermutationen zur Verkleinerung von Beulen nutzen. Dazu verwendet man die folgende heuristische Methode.

Beulenverkleinerung

Phase A: Isolierte Elemente in einer Spalte von W (außer in der letzten) werden in die Nordwest-Ecke permutiert.

$$E^T_{(3\,1\,2)} \begin{bmatrix} * & 0 & * \\ * & 0 & * \\ * & * & * \end{bmatrix} E_{(2\,1\,3)} = \begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix}$$

verkleinert die Größe der Beule um 1.

Phase B: Isolierte Elemente in einer Zeile von W (außer in der letzten) werden in die Südost-Ecke permutiert.

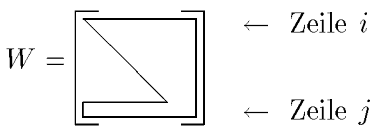
$$E^T_{(1\,3\,2)} \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & 0 & 0 \\ * & * & * \end{bmatrix} E_{(3\,1\,2)} = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

verkleinert die Größe der Beule um 1.

Phase C: Isolierte Elemente in der letzten Spalte von W werden in die Nordwest-Ecke permutiert.

Bemerkung (Resultat der Beulenverkleinerung): Die folgenden Aussagen sollte man zur Übung verifizieren:

1) Nach Durchlauf der Phasen A-C hat die resultierende Beule die gleiche Form wie die Startbeule, also:



2) Kann V durch Zeilen- und Spaltentransformationen auf Dreicksgestalt transformiert werden, so wird dies durch die Phasen A-C erreicht.

3) Faßt man die in den Phasen A-C gewählten Zeilen- und Spaltenpermutationen zu Matrizen $\tilde{Q}, \tilde{R}$ zusammen, so gilt wieder $\tilde{L}_j \tilde{P}_j \ldots \tilde{L}_i \tilde{P}_i (\tilde{Q} V \tilde{R}) = \bar{U}$.

4) In den Phasen A und B bleiben die Einselemente auf der Diagonalen von U erhalten.

In allen Vorschlägen wird zur Wahrung der numerischen Stabilität und zur Verkleinerung der Faktorenlisten von Zeit zu Zeit eine neue LU-Zerlegung durchgeführt. Mischformen, bei denen ein Teil der Problemdaten im Speicher mit Direktzugriff und ein Teil im externen Speicher mit langsameren sequentiellen Zugriff gehalten werden, sind ebenfalls üblich und wegen der Größe mancher Probleme auch notwendig. Für Literaturangaben verweisen wir wieder auf das Buch von Chvatal [2].

2 Explizite Behandlung nichtkanonischer Systeme

Bei der Einführung des Simplexverfahrens haben wir nur kanonische Probleme der Form

$$\max\{c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$$

betrachtet. Probleme in anderer Gestalt, mit nach oben beschränkten Variablen, mit nicht vorzeichenbeschränkten Variablen oder mit Gleichungen haben wir in kanonische Form umgeformt. Bei diesen Umformungen wächst jedoch entweder die Anzahl der Restriktionen oder die Anzahl der Variablen, wodurch Speicherplatz und Rechenzeit zunehmen. Daher ist es besser, solche Varianten explizit zu behandeln. Wir werden die entsprechenden Anpassungen des Simplexverfahrens jeweils in der Tableauform diskutieren; die notwendige Übertragung auf praktikable Formen des Simplexverfahrens, etwa mit Faktorisierungstechniken, ist nicht schwierig.

Behandlung von Gleichungen

Hier bietet sich unmittelbar eine Variante der bekannten Zweiphasenmethode an. In der Aufgabe

$$\max\{c^T x \mid \underbrace{Ax \leq b, Gx = d, x \geq 0}_{P}\}$$

können wir oBdA $b \geq 0$, $d \geq 0$ annehmen. In der Hilfsphase wird das erweiterte Problem

$$\gamma = \min\{1^T z \mid Ax + y = b, Gx + z = d, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

untersucht. Wir beginnen mit der Basislösung $y = b$ und $z = d$ mit den Nichtbasisvariablen $x = 0$. Die Darstellung der Zielfunktion in Tableauform ergibt sich wegen $z = d - Gx$ zu $1^T z = 1^T d - 1^T Gx$. Das erweiterte Tableau lautet:

$-1^T d$	$1^T G$
0	c^T
b	$-A$
d	$-G$

Wie bei der Zweiphasenmethode zeigt $\gamma > 0$, daß keine zulässige Lösung des ursprünglichen Problems existiert ($P = \emptyset$). Anderenfalls findet man eine Lösung mit $z = 0$ und damit eine zulässige Lösung. Ist die zugehörige Basislösung entartet, muß man möglicherweise in der Basis befindliche Hilfsvariablen in die Nichtbasis tauschen.

Beschränkte Variable

Sind die Variablen nach oben durch $d > 0$ beschränkt, d. h. $0 \leq x \leq d$, so nennen wir die Variablen und die zugehörigen Schlupfvariablen *komplementär*. Eine Komplementärvariable ist wegen $x + \bar{x} = d, x \geq 0, \bar{x} \geq 0$ stets durch die jeweils andere zugehörige Variable festgelegt. Die entsprechende Variante des kanonischen LP lautet:

$$\max\{c^T x \mid Ax \leq b, 0 \leq x_j \leq d_j \text{ für } j \in K, 0 \leq x_j \text{ für } j \notin K\}$$

mit $b \geq 0$ und $d_j < \infty$ für $j \in K$. Mit den im Tableau T enthaltenen Koeffizienten

T =

	t_{ij}

lautet die Darstellung der Zielfunktion und der Restriktionen des LP:

$$z = t_{00} + \sum_{j=1}^{n} t_{0j} x_{N(j)} \tag{2.1}$$

$$x_{B(i)} = t_{i0} + \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_{N(j)} \tag{2.2}$$

Da nur eine der beiden komplementären Variablen Nichtbasisvariable sein kann, genügt es jeweils eine in der Darstellung zu benutzen. Der Wert der jeweils anderen ergibt sich dann leicht. Bei der Durchführung des Pivotschrittes müssen natürlich die neu hinzugekommenen Restriktionen berücksichtigt werden.

Pivotwahl

B bezeichne die Basis, N die Nichtbasis und s die Pivotspalte. Die Nichtbasisvariable $x_{N(s)}$ ist nach oben beschränkt durch:

1. wegen $x_{B(i)} \geq 0$: falls $t_{is} < 0$ gilt $x_{N(s)} \leq \dfrac{t_{io}}{-t_{is}}$,
2. wegen $x_{B(i)} \leq d_{B(i)}$ für $B(i) \in K$: falls $t_{is} > 0$ gilt $x_{N(s)} \leq \dfrac{t_{io} - d_{B(i)}}{-t_{is}}$,
3. für $N(s) \in K$: $x_{N(s)} \leq d_{N(s)}$.

Je nach aktiver Beschränkung unterscheiden wir die folgenden vier Fälle.

1. Fall Die Zielfunktion ist unbeschränkt, da

$$N(s) \notin K \text{ und für alle i gilt sowohl } (B(i) \in K \Rightarrow t_{is} \leq 0) \text{ als auch } t_{is} \geq 0.$$

2. Fall Die Beschränkung nach 3. ist minimal. Wir ersetzen die Austauschvariable in der Nichtbasis durch die komplementäre Variable: $x_{N(s)} \leftrightarrow \bar{x}_{N(s)}$. Die resultierende Änderung der Tableaudaten ist leicht zu berechnen; es gilt:

$$\begin{aligned} x_{B(i)} &= t_{i0} + \textstyle\sum_j t_{ij} x_{N(j)}, \\ &= t_{i0} + \textstyle\sum_{j \neq s} t_{ij} x_{N(j)} + t_{is}(d_{N(s)} - \bar{x}_{N(s)}), \\ &= t_{i0} + t_{is} d_{N(s)} + \textstyle\sum_{j \neq s} t_{ij} x_{N(j)} + (-t_{is}) \bar{x}_{N(s)}. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten der Zielfunktionsdarstellung ändern sich analog. Zusammengefaßt erhalten wir als Transformation $S(s)$ der Tableaudaten:

$$S(s): \boxed{\begin{array}{l} \bar{t}_{i0} := t_{i0} + t_{is} d_{N(s)} \\ \hline \bar{t}_{is} := -\, t_{is} \end{array}} \text{ für } 0 \leq i \leq m$$

3. Fall Die Beschränkung nach 2. ist minimal. Da $x_{B(r)}$ die obere Schranke erreicht, fällt die entsprechende Komplementärvariable auf 0. Wir führen den Austausch in zwei Schritten durch.

1) $x_{B(r)} \leftrightarrow x_{N(s)}$. Dies ist ein gewöhnlicher Pivotschritt mit Pivotelement t_{rs}, der die Tableaudaten $\bar{t}_{ij}$ erzeugt.
2) $x_{\bar{N}(s)} \leftrightarrow \bar{x}_{\bar{N}(s)}$. Die Transformation $S(s)$ liefert die gesuchte Darstellung $\bar{x}\bar{t}_{is}$.

4. Fall Ist schließlich die Beschränkung nach 1. minimal, so genügt ein Pivotschritt mit Pivotelement t_{rs}: $x_{B(r)} \leftrightarrow x_{N(s)}$.

Das Simplexverfahren mit beschränkten Variablen:

Problem: Bestimme eine optimale Lösung des linearen Programms

$$\max\{c^T x \mid Ax \le b;\ 0 \le x \le d\},\ \text{wobei } b \ge 0 \text{ und } 0 \le d \le \infty.$$

Ausgangsdaten:

$$k := 0; \qquad (t_{ij}) := \begin{pmatrix} 0 & c^T \\ b & -A \end{pmatrix}; \qquad 0 \le i \le m; \quad 0 \le j \le n;$$

$K \subseteq \{1, \ldots, n\}$, die Menge der Indizes i, wobei $0 \le x_i \le d_i < \infty$.

$$B(i) := \begin{cases} r, & \text{falls } x_r \text{ in der Basis ist;} \\ -r, & \text{falls } \overline{x}_r \text{ in der Basis ist.} \end{cases}$$

$$N(j) := \begin{cases} r, & \text{falls } x_r \text{ eine Nichtbasisvariable ist;} \\ -r, & \text{falls } \overline{x}_r \text{ eine Nichtbasisvariable ist.} \end{cases}$$

Der Algorithmus:

1. **Optimalität:** Ist ein $t_{0j} > 0$ für $1 \le j \le n$, so gehe nach 2.

   Anderenfalls ist eine Optimallösung erreicht. Setze

   $$x_{B(i)} := \begin{cases} t_{i0}, & \text{falls } B(i) > 0; \\ d_{B(i)} - t_{i0}, & \text{falls } B(i) < 0, \end{cases} \quad \text{und } x_{N(j)} := \begin{cases} 0, & \text{falls } N(j) > 0; \\ d_{N(j)}, & \text{falls } N(j) < 0, \end{cases}$$

   wobei $1 \le i \le m$ und $1 \le j \le n$. Terminiere.

2. **Bestimmung der Austauschspalte:** Man wähle den Index s so, daß

   $$t_{0s} = \max\{t_{0j} \mid 1 \le j \le n\}.$$

3. **Endlichkeitskriterium und Wahl der Austauschzeile:**
   Bestimme das Minimum der Größen:

   $$\begin{array}{ll} d_{N(s)}, & \text{falls } \ N(s) \in K; \\ -\dfrac{t_{i0}}{t_{is}}, & \text{falls } \ t_{is} < 0; \\ \dfrac{t_{i0} - d_{B(i)}}{-t_{is}}, & \text{falls } \ t_{is} > 0 \text{ und } B(i) \in K; \quad \text{wobei } 1 \le i \le m. \end{array}$$

   Ist die Menge

   $$(\{N(s)\} \cap K) \cup \{i \mid t_{is} < 0,\ 1 \le i \le m\} \cup \{i \mid t_{is} > 0, B(i) \in K,\ 1 \le i \le m\}$$

   leer, so existiert keine endliche Lösung. Terminiere.

a) Wird das Minimum für $d_{N(s)}$ angenommen, so gehe nach 5.

b) Wird das Minimum für $-\dfrac{t_{r0}}{t_{rs}}$ angenommen, so gehe nach 4.

c) Wird das Minimum für $\dfrac{t_{r0} - d_{B(r)}}{-t_{rs}}$ angenommen, setze $k := 1$ und gehe nach 4.

4. **Pivotoperation:** Vertausche die r-te Komponente von B mit der s-ten Komponente von N und setze wie üblich

$$\begin{array}{lll} \bar{t}_{rs} := & \frac{1}{t_{rs}}; & \\ \bar{t}_{rj} := & -\frac{t_{rj}}{t_{rs}}, & \text{für } j = 0, \ldots, n,\ j \neq s; \\ \bar{t}_{is} := & \frac{t_{is}}{t_{rs}}, & \text{für } i = 0, \ldots, m,\ i \neq r; \\ \bar{t}_{ij} := & t_{ij} - \frac{t_{is} t_{rj}}{t_{rs}}, & \text{für } i = 0, \ldots, m,\ i \neq r \text{ und } j = 0, \ldots, n,\ j \neq s. \end{array}$$

Nun ersetze $t_{ij} := \bar{t}_{ij}, \qquad 0 \leq i \leq m,\ 0 \leq j \leq n.$

Ist $k = 1$, so setze $k := 0$ und gehe zu 5, sonst gehe nach 1.

5. S-**Transformation:**

$$\begin{array}{ll} t_{i0} := t_{i0} + t_{is} d_{N(s)}, & \\ t_{is} := -\, t_{is}, & \text{für } 0 \leq i \leq m. \end{array}$$

Setze $N(s) := -\, N(s)$ und gehe nach 1.

Freie Variablen

Sind die Variablen weder nach oben noch nach unten beschränkt, so sprechen wir von *freien* Variablen. Die zugehörige Variante des kanonischen LP lautet:

$$\max\{c^T x \mid Ax \leq b, x_j \geq 0, j \notin K\}$$

mit freien Variablen in K und $b \geq 0$.

Optimalitätstest

Der Wert der Zielfunktion $z = +t_{00} + \sum t_{0j} x_{N(j)}$ ist optimal, falls $t_{0j} = 0$ für alle $N(j) \in K$ und $t_{0j} \leq 0$ für alle $N(j) \notin K$. Anderenfalls finden wir einen Pivotspaltenindex s.

Die Restriktionen zu $B(i) \in K$ beschränken $x_{N(s)}$ nicht. Wir betrachten daher nur $B(i) \notin K$.

1. Fall Falls $t_{0s} > 0$ ist, versuchen wir, $x_{N(s)}$ positiv zu wählen. Wegen $x_{B(i)} = t_{i0} + t_{is} x_{N(s)}$ liegt eine Beschränkung vor, falls $t_{is} < 0, B(i) \notin K$.

2. Fall Ist dagegen $t_{0s} < 0$, versuchen wir $x_{N(s)}$ negativ zu wählen. Hier ergibt sich analog zum 1. Fall eine Beschränkung, falls $t_{is} > 0, B(i) \notin K$.

Das Simplexverfahren mit freien Variablen:

Problem: Bestimme eine optimale Lösung des linearen Programms

$$\max\{c^T x \mid Ax \leq b;\ x_L \geq 0\}, \quad \text{wobei } b \geq 0 \text{ und } L \subseteq \{1, \ldots, n\}.$$

Ausgangsdaten:

$$(t_{ij}) := \begin{pmatrix} 0 & c^T \\ b & -A \end{pmatrix}; \qquad 0 \leq i \leq m; \quad 0 \leq j \leq n;$$

$$B := (n+1, \ldots, n+m), \qquad N := (1, \ldots, n).$$

Hierbei ist $K = \{1, \ldots, n\} \setminus L$, die Menge der Indizes der freien (nichtvorzeichenbeschränkten) Variablen.

Der Algorithmus:

1. **Optimalität:** Ist ein $t_{0j} > 0$ für $N(j) \notin K$ oder ein $t_{0j} \neq 0$ für $N(j) \in K$, so gehe nach 2. Anderenfalls ist eine Optimallösung erreicht. Setze

   $$x_{B(i)} := t_{i0}, \quad (1 \leq i \leq m); \qquad x_{N(j)} := 0, \quad (1 \leq j \leq n); \qquad \bar{z} := t_{00}.$$

   Stop.

2. **Bestimmung der Austauschspalte:** Man wähle den Index s so, daß

   $$|t_{0s}| = \max\left\{\max_{N(j) \notin K} t_{0j},\ \max_{N(j) \in K} |t_{0j}|\right\}.$$

   Ist $t_{0s} > 0$, so gehe nach 3. Anderenfalls gehe nach 4.

3. **Endlichkeitskriterium bei Vergrößerung von $x_{N(s)}$:** Ist die Menge

   $$I := \{i \mid t_{is} < 0,\ B(i) \notin K\}$$

   leer, so existiert keine endliche Lösung. Terminiere. Anderenfalls gehe nach 5.

4. **Endlichkeitskriterium bei Verkleinerung von $x_{N(s)}$:** Ist die Menge

   $$I := \{i \mid t_{is} > 0,\ B(i) \notin K\}$$

   leer, so existiert keine endliche Lösung. Terminiere. Anderenfalls gehe nach 5.

5. **Bestimmung der Austauschzeile:** Man wähle den Index r so, daß

   $$\frac{t_{r0}}{|t_{rs}|} = \min\left\{\frac{t_{i0}}{|t_{is}|} \;\middle|\; i \in I\right\}.$$

6. **Pivotoperation:** Vertausche die r-te Komponente von B mit der s-ten Komponente von N und setze wie üblich

$$\begin{array}{lll}
\bar{t}_{rs} & := & \frac{1}{t_{rs}}; \\
\bar{t}_{rj} & := & -\frac{t_{rj}}{t_{rs}}, \qquad \text{für } j = 0, \ldots, n,\ j \neq s; \\
\bar{t}_{is} & := & \frac{t_{is}}{t_{rs}}, \qquad \text{für } i = 0, \ldots, m,\ i \neq r; \\
\bar{t}_{ij} & := & t_{ij} - \frac{t_{is}t_{rj}}{t_{rs}}, \quad \text{für } i = 0, \ldots, m,\ i \neq r \text{ und } j = 0, \ldots, n,\ j \neq s.
\end{array}$$

Nun ersetze $t_{ij} := \bar{t}_{ij}$, für $0 \leq i \leq m$, $0 \leq j \leq n$ und gehe nach 1.

Wir rechnen zur Übung zwei entsprechende Beispiele in Tableauform.

Beispiel (Obere Schranken):

Bestimme eine optimale Lösung des linearen Programms

$$\max \{-x_1 + 4x_2 \mid x_1 - x_2 + x_3 = 2,\ 0 \leq x_1,\ 0 \leq x_2 \leq 4,\ 0 \leq x_3 \leq 5\}.$$

Wir erhalten die folgenden Tableaus:

Ausgangstableau:

	N	x_1	x_2
B	0	-1	4
x_3	2	-1	1

$x_2 \leq 4$

$x_3 = 2 + x_2 \leq 5$ (begr.)

Zwischentableau: (nach b))

	N	x_1	x_3
B	-8	3	4
x_2	-2	1	1

auf dieses Tableau wird nun S(2) angewandt

2. Tableau:

	N	x_1	$\bar{x}_3$
B	12	3	-4
x_2	3	1	-1

$x_2 = 3 + x_1 \leq 4$

Zwischentableau: (nach b))

	N	x_2	$\bar{x}_3$
B	3	3	-1
x_1	-3	1	1

auf dieses Tableau wird nun S(1) angewandt

3. Tableau:

	N	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$
B	15	-3	-1
x_1	1	-1	1

Dieses Tableau ist optimal.

Lösung:

$x_1 = 1$

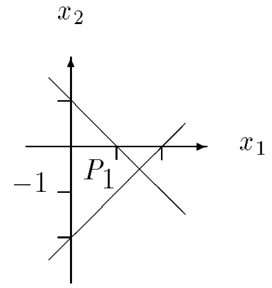
$\bar{x}_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 4$

$\bar{x}_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 5$

Beispiel (Nicht vorzeichenbeschränkte Variable):

Bestimme eine optimale Lösung des linearen Programms

$$\max \left\{ x_1 + 2x_2 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 - x_2 \le 2 \\ x_1 + x_2 \le 1 \end{array} \right\}.$$



Ausgangstableau:

	N	x_1	x_2
B	0	1	2
y_1	2	-1	1
y_2	1	-1	-1

$y_1,\ y_2 \ge 0$

2. Tableau:

	N	x_1	y_2
B	2	-1	-2
y_1	3	-2	-1
x_2	1	-1	-1

Pivotspalte 1

Lösung unbeschränkt

Anwendung auf lineare Ausgleichsprobleme

In mathematischen Modellen konkreter physikalischer oder technischer Vorgänge benutzt man häufig unbekannte Parameter, um das Modell flexibel anzupassen. Die günstigste Anpassung ergibt sich durch Minimierung der beobachteten Abweichungen im Experiment. Die Modellgröße $v = v(u)$ sei linear abhängig von wählbaren Parametern $u_1, \ldots, u_n$. Die Art der linearen Abhängigkeit sei unbekannt, d. h. $v = u^T x$ für einen unbekannten Vektor x. In m Experimenten mit verschieden gewählten Parametern gilt entsprechend $v = Ux$ mit einer bekannten $m \times n$ Matrix U.

Die Abweichung $\Delta := v - Ux$ soll durch Wahl von x minimiert werden. Verschiedene Fehlermaße führen auf verschiedene Anpassungen:

$$L_\infty : \max |\Delta_i|, \quad L_1 : \frac{1}{m} \sum |\Delta_i|, \quad L_2 : \frac{1}{m} \sum \Delta_i^2$$

Die Minimierung von Quadratsummen werden wir in der Nichtlinearen Optimierung genauer untersuchen, hier wollen wir nur die ersten beiden Ansätze nutzen.

L_∞-Norm (Stiefel, 1960)

Stiefel hat die Minimierung der maximalen Abweichung geschickt auf die Aufgabe

$$\begin{array}{lllll} \min & x_0 & & & \\ \text{unter} & |v_i - \sum_j u_{ij} x_j| & \le & x_0 & (1 \le i \le m) \\ & x_0 & \ge & 0 & \end{array}$$

zurückgeführt. Die maximale Abweichung wird als neue, nach unten durch 0 beschränkte Variable x_0 zum Modell adjungiert. Die Aufgabe besitzt offenbar zulässige Lösungen, z.B. $x \equiv 0, x_0 = \max|v_i|$. Nur bei exakt bestimmbaren unbekannten Parametern und bei Experimenten, in denen keine Meß- oder Beobachtungsfehler auftreten, werden alle Abweichungen verschwinden. Daher dürfen wir oBdA folgenden Ansatz machen:

$$x_0 > 0,\ y_0 := \frac{1}{x_0},\ y_j := -\frac{x_j}{x_0}.$$

Durch Auflösen der Beträge und Einsetzen der neuen Variablen erhalten wir:

$$\begin{array}{lllr} \max & y_0 & & \\ \text{unter} & +v_i y_0 + \sum_j u_{ij} y_j & \leq & 1 \\ & -v_i y_0 - \sum_j u_{ij} y_j & \leq & 1 \\ & y_0 & \geq & 0 \end{array}$$

Mit $A := [v|U]$ lautet die Aufgabe in Matrixform

$$\max\{y_0 \mid Ay \leq 1,\ -Ay \leq 1,\ y_0 \geq 0\}.$$

Für die Schlupfvariable $0 \leq z := 1 - Ay$ der ersten Ungleichung lautet die zweite Ungleichung in äquivalenter Form $z \leq 2$. Damit finden wir als äquivalentes LP mit expliziten oberen Schranken:

$$\max\{y_0 \mid Ay + z = 1,\ 0 \leq z \leq 2,\ y_0 \geq 0\}.$$

L_1-Norm

Für die L_1-Norm lautet die Aufgabe zunächst

$$\min\left\{\sum_i |\underbrace{(v - Ux)_i}_{\Delta_i}| \,\middle|\, x \in \boldsymbol{R}^n\right\}.$$

Wir fassen die Abweichungen $\delta_i := |\Delta_i|$ zu einem Vektor δ zusammen:

$$\begin{array}{lrll} \min & \sum_{i=1}^m \delta_i & & \\ \text{unter} & v - Ux & \leq & \delta, \\ & -v + Ux & \leq & \delta, \\ & \delta & \geq & 0. \end{array}$$

Die Schlupfvariable $z := \delta - v + Ux \geq 0$ führt uns schließlich auf

$$\min\left\{\sum \delta_i \,\middle|\, \delta + Ux - z = v,\ 0 \leq z \leq 2\delta,\ \delta \geq 0\right\}.$$

Falls $m \gg n$, ist es vorteilhaft, daß duale Problem zu lösen.

Ein Beispiel zur Ausgleichsrechnung

Wir lösen das lineare Ausgleichsproblem

$$\min \{ \max\{|x_1|, |x_2|, |4 - x_1 - x_2|\} \mid x \in \boldsymbol{R}^n \} .$$

wofür sich die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ergibt. Im folgenden sind y_1 und y_2 unbeschränkte Variable, $y_0 \geq 0$. Wir berechnen mit Hilfe von Pivotschritten aus dem Ausgangstableau:

Tableau 0:

	N	y_0	y_1	y_2
B	0	1	0	0
z_1	1	0	1	0
z_2	1	0	0	1
z_3	1	$\boxed{-4}$	-1	-1

die folgenden Simplextableaus:

Tableau 1:

	N	z_3	y_1	y_2
B	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
z_1	1	0	$\boxed{1}$	0
z_2	1	0	0	1
y_0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$

Tableau 2:

	N	z_3	z_1	y_2
B	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
y_1	-1	0	1	0
z_2	1	0	0	$\boxed{1}$
y_0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$

Tableau 3:

	N	z_3	z_1	z_2
B	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
y_1	-1	0	1	0
y_2	-1	0	0	1
y_0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$

woraus wir die Lösung des LP ablesen: $y_0 = \frac{3}{4}$, $y_1 = -1$, $y_2 = -1$. Hieraus gewinnen wir die Lösung

$$x_0 = \frac{1}{y_0} = \frac{4}{3},\; x_1 = -y_1 \cdot x_0 = \frac{4}{3},\; x_2 = -y_2 \cdot x_0 = \frac{4}{3}$$

des linearen Ausgleichsproblems.

3 Duale Simplexverfahren

Aus der Dualitätstheorie wissen wir, daß zur linearen Optimierungsaufgabe

$$(LP)\ \max\{c^T x \mid \underbrace{Ax \le b, x \ge 0}_{P}\}$$

eine duale Aufgabe

$$(DP)\ \min\{y^T b \mid y^T A \ge c^T, y \ge 0\},$$

gehört, die sich wieder in der Form der Ausgangsaufgabe schreiben läßt:

$$(DP')\ \max\{y^T(-b) \mid (-A)^T y \le -c, y \ge 0\}.$$

Ist die eine lösbar, so auch die andere, und zwar mit gleichem Optimalwert. Löst man (DP') mittels primalem Simplexverfahren und interpretiert dieses Verfahren als ein Verfahren zur Lösung des Ausgangsproblems, so findet man ein neues Verfahren, das duale Simplexverfahren von Lemke (1954). Wir wollen diese Interpretation Schritt für Schritt aus dem primalen Verfahren für (DP') ableiten.

Startbasis

Der kanonischen Startbasis B' des dualen Problems entspricht die kanonische Nichtbasis N des primalen Problems und umgekehrt:

$$\begin{array}{lcllcl} B' & \hat{=} & \{y_{m+1}, \dots, y_{m+n}\} & \leftrightarrow & N & = & \{x_1, \dots, x_n\}, \\ N' & \hat{=} & \{y_1, \dots, y_m\} & \leftrightarrow & B & = & \{x_{n+1}, \dots, x_{m+n}\}. \end{array}$$

Daraus ergibt sich eine Variablenzuordnung der dualen und primalen Variablen:

$$\begin{array}{ccccccc} y_1 & y_2 & \dots & y_m & y_{m+1} & \dots & y_{n+m}, \\ x_{m+1} & x_{n+2} & \dots & x_{n+m} & x_1 & \dots & x_n. \end{array}$$

Die etwa in Tableauform betrachteten Anfangsdaten des dualen Problems sind in transponierter, negativer Form genau in denen des primalen Problems wiederzufinden:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & y_{N'} \\ \hline & -b_0 & -b_{N'}^T \\ \hline y_{B'} & -c_{B'} & A_{N'}^T \\ \hline \end{array} \equiv T' \qquad \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & x_N \\ \hline & c_0 & c_N^T \\ \hline x_B & b_B & -A_N \\ \hline \end{array} \equiv T \equiv (-T')^T.$$

Wir nehmen an, daß dieser Zusammenhang auch für die aktuellen im Verfahren vorliegenden Tableaus gilt, wenn wir jeweils entsprechende Pivotoperationen ausführen. Sei also $T = (t_{ij}) = (-t'_{ji}) = -T'^T$.

Dual zulässig

T' ist offenbar dual zulässig, falls T primal optimal ist, denn die 0-Spalte T'_0 von T' erfüllt $T'_0 \geq 0$ genau dann, wenn die 0-Zeile t_0 von T die Bedingung $t_0 \leq 0$ erfüllt.

Dual optimal

Umgekehrt bedeutet duale Optimalität gerade primale Zulässigkeit: $t'_0 \leq 0$ genau dann, wenn $T_0 \geq 0$.

In einem Simplexverfahren für das duale Problem liegt also stets primale Optimalität vor und wir müssen versuchen, die fehlende primale Zulässigkeit zu erzwingen.

Pivotelement in T'

Dazu wählen wir im dualen Tableau eine Pivotspalte r mit Hilfe des üblichen Kriteriums aus, bzw. im primalen Tableau die entsprechende Pivotzeile r:

$$t'_{0r} = \max_{i \geq 1} t'_{0i} \quad \leftrightarrow \quad t_{r0} = \min_i t_{i0}.$$

Anschließend bestimmen wir im dualen Problem die Pivotzeile s unter Beachtung der Beibehaltung der dualen Zulässigkeit, oder entsprechend im primalen Problem die Pivotspalte unter Beibehaltung der primalen Optimalität:

$$\frac{t'_{s0}}{-t'_{sr}} = \min_j \left\{ \frac{t'_{j0}}{-t'_{jr}} \middle| t'_{jr} < 0 \right\}, \quad \longleftrightarrow \quad \frac{t_{0s}}{-t_{rs}} = \min_j \left\{ \frac{t_{0j}}{-t_{rj}} \middle| t_{rj} > 0 \right\}.$$

Unbeschränkte Zielfunktion im dualen Problem (DP')

Falls die Pivotspalte r von T' nichtnegativ ist, ist die duale Zielfunktion nicht nach oben beschränkt. Aus der Dualitätstheorie folgt, daß das primale Problem keine zulässige Lösung besitzt. Wir können dies auch direkt schließen, da dann die entsprechende Zeile r in T nichtpositiv ist. Wegen $t_{rj} \leq 0$ gilt:

$$x_{B(r)} = t_{r0} + \sum t_{rj} x_{N(j)} \leq t_{r0} < 0.$$

Pivotschritt in T'

Anderenfalls aktualisieren wir die vorliegenden Daten mit Hilfe eines Pivotschrittes, wobei wieder jede Operation im dualen Tableau in eine entsprechende Operation im primalen Tableau übersetzt wird:

Pivotelement:	$\bar{t}'_{sr}$	$:=$	$\frac{1}{t'_{sr}}$	$\leftrightarrow$	$\bar{t}_{rs}$	$:=$	$\frac{1}{t_{rs}}$
Pivotzeile s:	$\bar{t}'_{si}$	$:=$	$-\frac{t'_{si}}{t'_{sr}}$	$\leftrightarrow$	$\bar{t}_{is}$	$=$	$\frac{t_{is}}{t_{rs}}$
Pivotspalte r:	$\bar{t}'_{jr}$	$:=$	$\frac{t'_{jr}}{t'_{sr}}$	$\leftrightarrow$	$\bar{t}_{rj}$	$=$	$-\frac{t_{rj}}{t_{rs}}$
übrige Elemente:	$\bar{t}'_{ji}$	$:=$	$t'_{ji} - \frac{t'_{si}t'_{jr}}{t'_{sr}}$	$\leftrightarrow$	$\bar{t}_{ij}$	$:=$	$t_{ij} - \frac{t_{is}t_{rj}}{t_{rs}}$
für $i \neq r, j \neq s$							

Offenbar entspricht ein Pivotschritt im dualen Tableau genau einem gewöhnlichen Pivotschritt im primalem Tableau. Wir können daher alle Schritte im primalen Tableau durchführen, wobei in jeder Iteration die Beziehung $(-T')^T = T$ erhalten bleibt.

Folgerung:

1. Das durch diese Interpretation gewonnene duale Simplexverfahren liefert ein neues Verfahren, das mit dual zulässigen (primal optimalen) Lösungen arbeitet.

2. Ist die duale Basislösung $y_{B'} = t_{0N}, y_{N'} = 0$ dual optimal (primal zulässig), so können wir aus dem primalen Tableau T die optimale Lösung zum primalen Problem ablesen.

3. Das Verfahren kann selbstverständlich auch in revidierter Form ohne Tableau durchgeführt werden. Als Optimalitätstest dient die primale Zulässigkeit, d. h. die Lösung x_B des Systems $A_B x_B = b$ muß $x_B \geq 0$ erfüllen. Die duale Basislösung $y_{B'}$ ergibt sich aus der Lösung π des Systems $\pi^T A_B = c_B^T$ zu $y_{B'}^T = -c_N^T + \pi^T A_N$. Ist die primale Lösung nicht zulässig, etwa $x_{B(r)} < 0$, so wählen wir den Pivotzeilenindex r. Die Pivotspalte w berechnen wir mit Hilfe der Lösung v des Gleichungssystems $v^T A_B = e_r^T$ zu $w^T = v^T A_N$, denn dann gilt $w^T = v^T A_N = e_r^T A_B^{-1} A_N = e_r^T \tilde{A}_N$.

Das Duale Simplexverfahren

Problem: Bestimme eine optimale Lösung des linearen Programms

$$\max\left\{c^T x \mid Ax \leq b,\ x \geq 0\right\},\ \text{wobei } c \leq 0.$$

Ausgangsdaten:

$$(t_{ij}) := \begin{pmatrix} 0 & c^T \\ b & -A \end{pmatrix}, \qquad 0 \leq i \leq m, \quad 0 \leq j \leq n,$$

$$B := (n+1, \ldots, n+m), \qquad N := (1, \ldots, n).$$

Der Algorithmus:

1. **Optimalität:** Ist ein $t_{i0} < 0$, so gehe nach 2. Anderenfalls ist eine Optimallösung erreicht. Setze

$$x_{B(i)} := t_{i0},\ (1 \leq i \leq m); \qquad x_{N(j)} := 0,\ (1 \leq j \leq n); \qquad \bar{z} := t_{00}$$

Stop.

2. **Bestimmung der Austauschzeile:** Man wähle den Index r so, daß

$$t_{r0} = \min_{1 \le i \le m} t_{i0}.$$

3. **Zulässigkeitskriterium:** Sind alle $t_{rj} \le 0,\ 1 \le i \le m$, so existiert keine Lösung. Terminiere.

   Gibt es ein $t_{rj} > 0,\ 1 \le j \le n$, so gehe nach 4.

4. **Bestimmung der Austauschspalte:** Man wähle den Index s so, daß

$$\frac{t_{0s}}{-t_{rs}} = \min \left\{ \frac{t_{0j}}{-t_{rj}} \mid t_{rj} > 0,\ j = 1, \ldots, n \right\}.$$

   Gehe nach 5.

5. **Pivotoperation:** Vertausche die s-te Komponente von N mit der r-ten Komponente von B und setze

$$\begin{array}{lll} \bar{t}_{rs} & := & \frac{1}{t_{rs}}; \\ \bar{t}_{rj} & := & -\frac{t_{rj}}{t_{rs}}, \quad \text{für } j = 0, \ldots, n;\ j \ne s; \\ \bar{t}_{is} & := & \frac{t_{is}}{t_{rs}}, \quad \text{für } i = 0, \ldots, m;\ i \ne r; \\ \bar{t}_{ij} & := & t_{ij} - \frac{t_{is} t_{rj}}{t_{rs}}, \quad \text{für } i = 0, \ldots, m; i \ne r, \text{ und } j = 0, \ldots, n,\ j \ne s. \end{array}$$

   Nun ersetze $t_{ij} := \bar{t}_{ij}, 0 \le i \le m,\ 0 \le j \le n.$

   Gehe nach 1.

Problem: Bestimme eine optimale Lösung des linearen Programms

$$\begin{array}{llrcr} \max\ -x_1 - 2x_2 & \text{unter} & -x_1 - x_2 & \le & -3 \\ & & -x_2 & \le & -2 \\ & & -x_1 + x_2 & \le & 3 \\ & & x_1 - x_2 & \le & 3 \\ & & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 & & \end{array}$$

Ausgangstableau:

		y_5 x_1	y_6 x_2
	0	-1	-2
y_1 x_3	-3	1	1
y_2 x_4	-2	0	1
y_3 x_5	3	1	-1
y_4 x_6	3	-1	1

Das Ausgangstableau ist dual zulässig, nicht aber primal zulässig.
Wir bestimmen $r = 1, s = 1$ und führen eine Pivotoperation durch:

Tableau 1:

		y_1 x_3	y_6 x_2
	-3	-1	-1
$y_5\, x_1$	3	1	-1
$y_2\, x_4$	-2	0	1
$y_3\, x_5$	6	1	-2
$y_4\, x_6$	0	-1	2

Ein weiterer dualer Simplexschritt mit $s = 2, r = 2$ führt auf

Tableau 2:

		y_1 x_3	y_2 x_4
	-5	-1	-1
$y_5\, x_1$	1	1	-1
$y_6\, x_2$	2	0	1
$y_3\, x_5$	2	1	-2
$y_4\, x_6$	4	-1	2

Tableau 2 ist nun primal und dual zulässig, daher primal und dual optimal. Die Lösung des gegebenen Problems lautet :

$$x_1 = 1, x_2 = 2, c^T x = -5 = b^T y, y_1 = +1, y_2 = +1, y_3 = 0, y_4 = 0$$

Beschränkte Variablen

Mit Hilfe des dualen Simplexverfahrens können wir auch beschränkte Optimierungsaufgaben der Form

$$(LP)\ \max\{c^T x \mid \underbrace{Ax \leq b, 0 \leq x \leq d}_{P}\}$$

lösen. Den in einem Vorschlag von Wagner (1965) immer wieder auftretenden Austausch von komplementären Variablen haben wir für Nichtbasisvariable bereits kennengelernt.

1. Nichtbasisvariable: $x_{N(j)} \leftrightarrow \bar{x}_{N(j)}$. Die nur in den Spalten 0 und j notwendige Änderung der Tableaudaten wird durch die Transformation $S(j)$ (siehe auch Seite 16) beschrieben:

   $$\bar{t}_{i0} := t_{io} + t_{ij} d_{N(j)}, \quad \bar{t}_{ij} := -t_{ij}$$

   für alle $0 \leq i \leq m$.

2. Basisvariable: $x_{B(i)} \leftrightarrow \bar{x}_{B(i)}$. Eine Änderung der Tableaudaten erfolgt nur in der zugehörigen i-ten Zeile:

$$d_{B(i)} - \bar{x}_{B(i)} \rightsquigarrow \underbrace{d_{B(i)} - t_{i0}}_{\bar{t}_{i0}} = \bar{x}_{B(i)} + \sum_j \underbrace{(-t_{ij})}_{\bar{t}_{ij}} x_{N(j)}$$

für alle $1 \leq j \leq n$. Wir bezeichnen diese Transformation mit $Z(i)$.

Anfangsproblem

Zunächst werden alle Nichtbasisvariablen $x_{N(j)}$ mit $c_{N(j)} > 0$ gegen Komplementärvariable ausgetauscht, so daß die Aufgabe in der Form (LP') mit Zielfunktionskoeffizienten $c'_N \leq 0$ vorliegt. Die kanonische Basislösung ist daher dual zulässig. Wir vernachlässigen dann die oberen Beschränkungen, wodurch eine möglicherweise größere Menge zulässiger Lösungen (Bezeichnung P') entsteht.

Iteration (Wagner, 1965)

Löse (LP') mit dualem Simplexverfahren ohne Berücksichtigung von d. Ist die duale Zielfunktion unbeschränkt, so gibt es wegen $P \subseteq P' = \emptyset$ keine zulässigen Lösungen. Anderenfalls finden wir eine optimale Basis B.

1. Falls $x_B \leq d_B$, so ist x Optimallösung zu (LP). Hierbei ist $d_{B(i)} := \infty$, falls $B(i) > n$.
2. Anderenfalls tauschen wir alle Basisvariablen $x_{B(i)}$ mit $x_{B(i)} > d_{B(i)}$ gegen die entsprechenden Komplementärvariablen aus und erhalten ein modifiziertes (LP').

Das neue (LP') wird nun wieder mit dualem Simplexverfahren gelöst.

Beispiel zum dualen Verfahren nach Wagner:

Problem:

$$\begin{array}{lrcrcr}
\max & -x_1 & + & 4x_2 & & \\
\text{unter} & x_1 & - & x_2 & \leq & 2 \\
 & -x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\
 & 0 & \leq & x_1 & \leq & 1 \\
 & 0 & \leq & x_2 & \leq & 4
\end{array}$$

Anfangstableau (zu LP)

		x_1	x_2
	0	-1	4
x_3	2	-1	1
x_4	2	1	-1

$S(2)$ $\Longrightarrow$ $x_2 \leftrightarrow \bar{x}_2$

Transformiertes Ausgangstableau (zu LP)

		x_1	$\bar{x}_2$
	16	-1	-4
x_3	6	-1	-1
x_4	-2	1	1

Pivot $\Longrightarrow$ $r = 2$ $s = 1$

		x_4	$\bar{x}_2$
	14	-1	-3
x_3	4	-1	0
x_1	2	1	-1

– optimal, da primal zulässig

– $x_1 = 2 > d_1 = 1$, also unzulässig für LP

– daher $Z(2)$: $x_1 \leftrightarrow \bar{x}_1$

		x_4	$\bar{x}_2$
	14	-1	-3
x_3	4	-1	0
$\bar{x}_1$	-1	-1	1

Pivot $\Longrightarrow$ $r = 2$ $s = 2$

		x_4	$\bar{x}_1$
	11	-4	-3
x_3	4	-1	0
$\bar{x}_2$	1	1	1

Das letzte Tableau

- ist optimal, da primal zulässig,
- ist zulässig für LP, da x_3 unbeschränkt und $x_2 = 3 \leq 4 = d_2$,
- liefert die optimale Lösung $x = (1, 3)^T$.

Primal-duales Verfahren

Zum Verständnis einer weiteren Variante des Simplexverfahrens betrachten wir eine lineare Aufgabe und die zugehörige duale Aufgabe in Standardform:

$$\min\{c^T x \mid \underbrace{Ax = b, x \geq 0}_{P}\}, \quad \max\{y^T b \mid \underbrace{y^T A \leq c^T}_{D}\}$$

Ein Paar zulässiger Lösungen $x \in P, y \in D$ ist optimal, falls die Komplementaritätsbedingung,

$$x_j > 0 \Rightarrow (y^T A)_j = c_j,$$

für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$, erfüllt ist. Im primal-dualen Verfahren arbeiten wir mit einer dual zulässigen Lösung $y \in D$ und versuchen, nur mit primalen Variablen in $K = K(y) := \{j \mid y^T A_j = c_j\}$ eine primal zulässige Lösung x zu konstruieren. Mit $L = L(y) := \{j \mid y^T A_j < c_j\}$ bezeichnen wir die Menge der übrigen primalen Variablen. Zur Konstruktion verwenden wir die Zweiphasenmethode angewandt auf die entsprechend eingeschränkte Menge der zulässigen primalen Lösungen, d. h. wir lösen die Aufgabe

LP(y)

$$\epsilon := \min\{1^T z \mid A_K x_K + z = b; x_L = 0, x \geq 0, z \geq 0\}$$

Falls $\epsilon = 0$, so gibt es eine für $LP(y)$ zulässige Lösung (x, z) mit $z = 0$, d. h. x, y ist ein optimales Paar des Ausgangsproblems.

Änderung von y, falls $\epsilon > 0$

Anderenfalls versuchen wir y in geschickter Weise zu verändern. Sei $\bar{u}$ Optimallösung des zu $LP(y)$ dualen Problems : $DP(y)$

$$\epsilon = \max\{u^T b \mid u^T A_K \leq 0, u \leq 1\}$$

1. Fall Falls $\tilde{L} := \{j \in L \mid u^T A_j > 0\} = \emptyset$, so folgt $\bar{u}^T A \leq 0$. Dann gilt $y + \delta\bar{u} \in D$ für alle $\delta \geq 0$. Längs dieses Halbstrahls ist die Zielfunktion nach oben unbeschränkt, denn $(y + \delta\bar{u})^T b = y^T b + \delta\bar{u}^T b$. Nach dem Dualitätssatz muß dann $P = \emptyset$ gelten.

2. Fall Anderenfalls ist

$$\bar{\delta} := \frac{c_k - y^T A_k}{\bar{u}^T A_k} := \min\left\{ \frac{c_j - y^T A_j}{\bar{u}^T A_j} \,\middle|\, j \in \tilde{L} \right\} > 0.$$

Die neue Lösung $\bar{y} := y + \bar{\delta}\bar{u}$ ist dual zulässig, da insbesondere für $j \in \tilde{L}$ gilt:

$$\bar{y}^T A_j - c_j = y^T A_j + \bar{\delta}\bar{u}^T A_j - c_j \leq y^T A_j - c_j + \frac{c_j - y^T A_j}{\bar{u}^T A_j}\bar{u}^T A_j = 0.$$

Bemerkung:

1. Die duale Zielfunktion wächst streng monoton bei Übergang von y zu $\bar{y}$, und zwar um $\bar{\delta}\epsilon$.

2. Die Optimallösung (x, z) von $LP(y)$ ist zulässig für $LP(y + \bar{\delta}\bar{u})$. Zum Nachweis betrachten wir eine positive Variable $x_j > 0$. Dann gilt $j \in K$, d. h. $y^T A_j = c_j$ und, nach dem Satz vom komplementären Schlupf angewandt auf $LP(y)$ und $DP(y)$, $\bar{u}^T A_j = 0$. Wegen $\bar{y}^T A_j = y^T A_j + \bar{\delta}\bar{u}^T A_j = c_j$ folgt $j \in K(\bar{y})$.

3. Das gesamte Verfahren ist, wenn man die üblichen Vorkehrungen bei entarteten Basiswechseln trifft, endlich, denn

   (a) es treten nur Basen von $\min\{1^T z \mid Ax + z = b, x \geq 0, z \geq 0\}$ als optimale Basen der $LP(y)$ auf

   (b) und wegen 2. ist, abgesehen von entarteten Basiswechseln, $1^T z$ streng monoton fallend.

Tableauaufbau

Um ein Beispiel in Tableauform rechnen zu können, sehen wir uns das um die Hilfsvariablen vergrößerte Tableau an:

$-y^T b$	$c_N^T - y^T A_N$
$u^T b$	$\tilde{d}_N^T$
$\tilde{b}$	$-(\tilde{A}\vert E)_N$

Wie in der 2-Phasenmethode werden in der Zielfunktionszeile nur die Koeffizienten $\tilde{c}_j$ zu den primalen Variablen mitgerechnet. In der Hilfszielfunktion berechnen wir die Koeffizienten zu den Hilfsvariablen wie in der Zweiphasenmethode und die Koeffizienten zu den primalen Variablen x_j aus $\tilde{d}_j = -u^T A_j$. Die beim Wechsel der dualen Lösung notwendigen Änderungen der Tableaudaten kann man leicht ablesen:

1. $\bar{\delta} = \min\left\{ \frac{\tilde{c}_j}{-\tilde{d}_j} \;\middle|\; j \in \tilde{L} \right\}$,

2. wegen $\bar{y} = y + \bar{\delta} u$ gilt

$$\begin{aligned} -\bar{y}^T b &= -y^T b + \bar{\delta}(-u^T b) \\ c_N^T - \bar{y}^T A_N &= c_N^T - y^T A_N + \bar{\delta}(-u^T A_N). \end{aligned}$$

Beispiel zum primal-dualen Verfahren:

Problem:

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \min & 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & & \\ \text{unter} & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ & 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 5 \\ & & & & & x & \geq & 0 \end{array}$$

1. Start mit $y = 0 \in D$

		x_1	x_2	x_3
	0	2	1	4
	8	-3	-2	-5
z_1	3	-1	-1	-2
z_2	5	-2	-1	-3

$\epsilon = 8$; $x = 0$; $K = \emptyset$; $L = \{1, 2, 3\}$
$\bar{\delta} = \min\{\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{4}{5}\} = \frac{1}{2}$;
$k = 2$

2. Tableau nach Änderung von y mittels $\bar{\delta}$

		x_1	x_2	x_3
	4	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$
	8	-3	-2	-5
z_1	3	-1	-1	-2
z_2	5	-2	-1	-3

$\Longrightarrow$

		x_1	z_1	x_3
	4	$\frac{1}{2}$	$*$	$\frac{3}{2}$
	2	-1	2	-1
x_2	3	-1	-1	-2
z_2	2	-1	1	-1

Das rechte Tableau entsteht aus dem linken mit $K = \{2\}$, $\quad s = 2$, $\quad r = 1$.
Das rechte Tableau minimiert $P(y)$, da $\tilde{d}_{z_1} = 2 > 0$.
$L = \{1,3\} \Rightarrow \bar{\delta} = \min\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\} = \frac{1}{2}, \quad k = 1$

<u>3. Tableau nach Änderung von y mittels $\bar{\delta}$</u>

		x_1	z_1	x_3
	5	0	$*$	1
	2	-1	2	-1
x_2	3	-1	-1	-2
z_2	2	-1	1	-1

$\Longrightarrow$

		z_2	z_1	x_3
	5	$*$	$*$	1
	0	1	1	0
x_2	1	1	0	-1
x_1	2	-1	1	-1

Das rechte Tableau entsteht aus dem linken mit $K = \{1,2\}$, $\quad s = 1$, $\quad r = 2$.
Im rechten Tableau gilt $\epsilon = 0 \Rightarrow$ optimal.

4 Matrixspiele

Die Entwicklung der Theorie der Matrixspiele ist eng mit der Dualitätstheorie für Lineare Optimierungsaufgaben verknüpft. Der Hauptsatz der Matrixspiele, der auf von Neumann zurückgeht, ist äquivalent zum starken Dualitätssatz.

Zweipersonennullsummenspiel

In diesem Spiel erlauben die Regeln in jeder Spielrunde den beiden Spielern die gleichzeitige Wahl je einer Aktion aus einer vorgegeben Menge. Jedem Paar gewählter Aktionen ist ein Ergebnis der Spielrunde in Form einer Auszahlung von Einheiten zugeordnet:

2 Spieler	Aktionen	Auszahlungsregel	
S_1	$\sigma_1, \ldots, \sigma_m$	Aktion σ_i	$\left.\right\}$ S_2 zahlt an S_1 a_{ij} Einheiten.
S_2	$\tau_1, \ldots, \tau_n$	Aktion τ_j	

Die Bezeichnung als Nullsummenspiel beruht darauf, daß der Gewinn des einen Spielers mit dem Verlust des anderen übereinstimmt.

Skin-Spiel

Beim Skin-Spiel werden Karten gezogen und bei gleicher Farbe gewinnt der Spieler S_1, bei ungleicher Farbe verliert er. Die Auszahlung richtet sich nach den beteiligten Karten.

		S_2		
		$\diamondsuit$	$\spadesuit$	$\spadesuit\spadesuit$
	$\diamondsuit$	1	-1	-2
S_1	$\spadesuit$	-1	1	1
	$\diamondsuit\diamondsuit$	2	-1	$-2/0$

Wenn man kein Patt ($a_{33} = -2$) als Regel zuläßt, gewinnt der Spieler S_2 in 5, der Spieler S_1 nur in 4 Fällen. Ist ein Spiel ohne Pattregel fair? Oder sollte man ein Patt ($a_{33} = 0$) vereinbaren? Zur Klärung wollen wir uns genauer mit den Möglichkeiten der Spieler befassen.

Auszahlung bei Zufallsstrategie

Bei einer Zufallsstrategie wählt jeder Spieler jede Aktion mit gewisser fester Wahrscheinlichkeit. Das kann bewußt oder unbewußt geschehen. Mit x_i wähle der Spieler S_1 die i-te Aktion, mit y_j der Spieler S_2 die j-te Aktion. Da es sich um Zufallsstrategien handelt, gilt

$$1^T x = 1, x \geq 0, \quad 1^T y = 1, y \geq 0.$$

Die erwartete Auszahlung ist dann $x^T Ay$. Kennt man die Strategie des anderen Spielers, kann man den eigenen Gewinn maximieren. Wir untersuchen nur den Fall der pessimistischen Spieler, die eine hohe Meinung vom Mitspieler zur Grundlage ihrer Wahl machen.

Sicherheitsstrategie von S_1

Der Spieler S_1 geht entsprechend dieser Haltung davon aus, daß der Spieler S_2 stets die passende optimale Gegenstrategie zur Wahl x von S_1 auswählt. Die zu erwartende Auszahlung ist dann

$$\min_{\substack{1^T y = 1 \\ y \geq 0}} x^T Ay = \min_j (x^T A)_j,$$

wobei sich die Gleichung ergibt, da das Optimum in einer Ecke des Simplex der Zufallsstrategien angenommen wird. Diese ungünstigste Auszahlung gilt es nun durch Wahl von x zu maximieren. Die resultierende lineare Optimierungsaufgabe

$$
(LP_1) \qquad \begin{array}{lrcll}
\max & z & & & \\
\text{unter} & z & \leq & (x^T A)_j & \text{für alle } j = 1, \ldots, n \\
& 1^T x & = & 1 & \\
& x & \geq & 0 &
\end{array}
$$

kann man in ausführlicher Form als

$$\begin{array}{ll} \max & (1\,0\ldots 0)\begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} \\ \text{unter} & \\ y\left\{\begin{bmatrix} 1 & \\ \vdots & -A^T \\ 1 & \end{bmatrix}\right. & \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} \le \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ w\{ \begin{bmatrix} 0\,1\ldots 1 \end{bmatrix} & \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \\ & x \ge 0 \end{array}$$

schreiben. Für die spätere Diskussion ordnen wir den Restriktionen Dualvariablen y, w zu.

Sicherheitsstrategie von S_2

Natürlich kann sich der zweite Spieler von den gleichen Überlegungen leiten lassen. Da er die Auszahlung minimieren will, muß er das Maximum

$$\max_{\substack{1^T x = 1 \\ x \ge 0}} \; x^T A y = \max_i (Ay)_i$$

durch geschickte Wahl seiner Strategie y minimieren. Die entsprechende lineare Optimierungsaufgabe lautet

$$(LP_2) \quad \begin{array}{lrcll} \min & w & & & \\ \text{unter} & w & \ge & (Ay)_i & \text{für alle } i = 1, \ldots, m \\ & 1^T y & = & 1 & \\ & y & \ge & 0 & \end{array}$$

oder in ausführlicher Darstellung

$$\begin{array}{ll} \min & (0\ldots 0\,1)\begin{pmatrix} y \\ w \end{pmatrix} \\ \text{unter} & \\ & \begin{bmatrix} 1\ldots 1\,0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} y \\ w \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} & 1 \\ -A & \vdots \\ & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} y \\ w \end{pmatrix} \ge \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ & y \ge 0 \end{array}$$

Bemerkung:

1. Beim Vergleich von (LP_1) mit (LP_2) erkennt man leicht, daß die Strategien beider Spieler den schwachen Dualitätssatz erfüllen:
$$z = z1^T y \leq x^T Ay \leq w.$$

2. Ein genauerer Blick auf die ausführlichen Formulierungen beider Aufgaben zeigt, daß (LP_1) und (LP_2) zueinander duale Aufgaben bilden.

3. Die Situation ist besonders einfach, denn sowohl (LP_1) als auch (LP_2) besitzen stets zulässige Lösungen, z.B. für hinreichend kleine z und hinreichend große w. Nach dem starken Dualitätssatz existiert also ein optimales Paar
$$\begin{bmatrix} z_* \\ x_* \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_* \\ w_* \end{bmatrix},$$
mit $z_* = w_*$. Insbesondere gilt
$$z_* = \underbrace{x_*^T Ay_*}_{\text{Wert des Spiels}} = w_*$$

4. Ein Spiel heißt daher *fair*, wenn $x_*^T Ay_* = 0$.

Wir haben mit Hilfe des starken Dualitätssatzes den Hauptsatz der Matrixspiele hergeleitet:

Satz 4.1 (von Neumann) *Jedes Zweipersonennullsummenspiel mit Auszahlungsmatrix A besitzt Zufallsstrategien x_*, y_* mit $x^T Ay_* \leq x_*^T Ay_* \leq x_*^T Ay$ (Sattelpunkt) für alle Zufallsstrategien x, y.*

Man kann umgekehrt den starken Dualitätssatz wieder aus diesem Satz ableiten, beide Sätze sind äquivalent.

Bestimmung optimaler Strategien

Natürlich können wir nun die optimalen Strategien mit Hilfe von Verfahren zur Lösung von linearen Optimierungsaufgaben berechnen.

1. Zur Vereinfachung sei oBdA $A \geq 0$, andernfalls verschiebe die Auszahlungen durch $a'_{ij} := a_{ij} - \alpha$ wobei $\alpha := \min a_{ij}$. Da
$$x^T A' y = x^T (A - \alpha 11^T) y = x^T Ay - \alpha(x^T 1)(1^T y) = x^T Ay - \alpha$$
verschiebt sich dadurch nur der Wert des Spiels, aber die optimalen Strategien bleiben unverändert.

2. Anschließend können wir oBdA z in (LP_1) beschränken: $z \geq 0$.

3. Schließlich eliminieren wir mit Hilfe der Gleichung $x_m = 1 - x_1 - \ldots - x_{m-1}$ die Variable x_m und erhalten eine Aufgabe in kanonischer Form:

$$\begin{array}{llll} \text{max} & z & & \\ \text{unter} & z + & \sum_{i=1}^{m-1}(a_{mj} - a_{ij})x_i & \leq a_{mj}, \quad j = 1 \ldots n, \\ & & \sum_{i=1}^{m-1} x_i & \leq 1, \\ & & z \geq 0, x \geq 0. & \end{array}$$

4. Die Ausgangsbasis zu $z = x_1 = \ldots = x_{m-1} = 0$ ist zulässig.

Beispiel zu den Matrixspielen:

Problem: Bestimme die optimalen Strategien für das Skin-Spiel ohne (bzw. mit) Pattregel.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2(0) \end{bmatrix} \stackrel{\alpha=-2}{\rightsquigarrow} \tilde{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 0(2) \end{bmatrix},$$

$$(a_{3j} - a_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0(\;\;2) \\ 3 & -2 & -3(-1) \end{bmatrix} \text{ für } (i = 1, 2) \quad \text{oder transponiert} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ 0(2) & -3(-1) \end{bmatrix}$$

Skin-Spiel mit Pattregel:

		z	y_4 x_1	y_5 x_2
	0	-1	0	0
y_1 x_4	4	-1	-1	-3
y_2 x_5	1	$\boxed{-1}$	0	2
y_3 x_6	2	-1	-2	1
w x_3	1	0	-1	-1

		x_5	x_1	x_2
	1	-1	0	2
x_4	3	1	-1	$\boxed{-5}$
z	1	-1	0	2
x_6	1	1	-2	-1
x_3	1	0	-1	-1

		x_5	x_1	x_4
	$\frac{11}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5}$
x_2	$\frac{3}{5}$			
z	$\frac{11}{5}$			
x_6	$\frac{2}{5}$			
x_3	$\frac{2}{5}$			

$\rightsquigarrow$ $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{3}{5}$, $x_3 = \frac{2}{5}$, $y_1 = \frac{2}{5}$, $y_2 = \frac{3}{5}$, $z = 11/5$, d.h. Wert > 0. Also ist das Spiel mit Pattregel unfair.

Skin-Spiel ohne Pattregel:

		z	x_1	x_2
	0	1	0	0
x_4	4	-1	-1	-3
x_5	1	-1	0	2
x_6	0	$\boxed{-1}$	0	3
x_3	1	0	-1	-1

		x_6	x_1	x_2
	0	-1	0	3
x_4	4	1	-1	$\boxed{-6}$
x_5	1	1	0	-1
z	0	-1	0	3
x_3	1	0	-1	-1

		x_6	x_1	x_4
	2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
x_2	$\frac{2}{3}$			
x_5	$\frac{1}{3}$			
z	2			
x_3	$\frac{1}{3}$			

$\leadsto$ $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1}{2}$, $y_1 = \frac{1}{2}$, $y_2 = 0$, $y_3 = \frac{1}{2}$, $z = 2$, d.h. Wert $= 0$. Also ist das Spiel ohne Pattregel fair.

5 Sensitivitätsanalyse

In der Sensitivitätsanalyse soll geklärt werden, wie sich geringfügige Änderungen numerisch auf die optimale Lösung von linearen Optimierungsaufgaben auswirken. Nachdem eine optimale Basis B von $\max\{c^T x \mid Ax = b, x \geq 0\}$ bestimmt ist, kann es notwendig sein,

1. Variable oder Restriktionen hinzuzufügen
2. oder Koeffizienten des Problems zu ändern.

Neue Restriktionen

Die Schlupfvariable einer neuen Restriktion $a^T x \leq \beta$ können wir zur Erweiterung in die Basis B aufnehmen. Die entsprechende Darstellung der Restriktion ist dann

$$\begin{aligned} \beta &= x_{n+1} + a^T x = x_{n+1} + a_B^T x_B + a_N^T x_N \\ &= x_{n+1} + a_B^T A_B^{-1} b + (a_N^T - a_B^T A_B^{-1} A_N) x_N \\ \underbrace{\beta - a_B^T A_B^{-1} b}_{\tilde{\beta}} &= x_{n+1} + (\underbrace{a_N^T - a_B^T A_B^{-1} A_N}_{\tilde{a}_N^T}) x_N \end{aligned}$$

Die Berechnung der Koeffizienten im Tableau zu $B \cup \{n+1\}$ kann mit Hilfe der alten Tableaudaten erfolgen:

$$(\tilde{\beta} \mid \tilde{a}_N^T) := (\beta \mid a_N^T) - a_B^T [\tilde{b} \mid \tilde{A}_N]$$

In revidierter Form ergeben sich die notwendigen Daten in zwei Schritten:

1. Löse $u^T A_B := a_B^T$,

2. $(\tilde{\beta} \mid \tilde{a}_N^T) := (\beta \mid a_N^T) - u^T[b \mid A_N]$.

Zur Bestimmung einer neuen optimalen Lösung des geänderten Problems bietet sich das duale Simplexverfahren an, da die vorliegende erweiterte Basis $B \cup \{n+1\}$ dual zulässig ist:

1. falls $\tilde{\beta} \geq 0$, so ist sie auch primal zulässig, also bereits die gesuchte neue Optimallösung,
2. falls $\tilde{\beta} < 0$, so können wir das duale Simplexverfahren mit ihr starten.

Neue Variable

Nach Hinzunahme einer neuen Variable u lautet das erweiterte Problem:

$$\max\{c^T x + d_0 u \mid Ax + du = b, x \geq 0, u \geq 0\}$$

Da die vorliegende Basis B primal zulässig bleibt, genügt zunächst die Überprüfung ihrer Optimalität. Die neuen Koeffizienten in entsprechender Darstellung ergeben sich bei revidierten Verfahren in zwei Schritten:

1. Löse $A_B \tilde{d} = d$,
2. $\tilde{d}_0 := d_0 - c_B^T \underbrace{A_B^{-1} d}_{\tilde{d}}$.

Zur Berechnung mit Hilfe vorliegender Tableaudaten $T = (t_{ij})$ benutzen wir die Tatsache, daß aus Sicht der erweiterten dualen Aufgabe

$$\max\left\{ -b^T y \;\middle|\; \begin{array}{ccc} -A^T y & \leq & -c \\ -dy & \leq & -d_0 \end{array} \right\}$$

eine zusätzliche Restriktion eingefügt wurde. Also können wir auf den ersten Abschnitt zurückgreifen. Die neue duale Schlupfvariable v erfüllt $-d^T y + v = -d_0$. Insbesondere ist $d_{m+1} = \cdots = d_{m+n} = 0$. Die erweiterte duale Basis $B' \cup v$ ergibt sich wie in der Diskussion des dualen Simplexverfahrens aus der Zuordnung primaler und dualer Variablen. Mit

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & \dots & x_n & x_{n+1} & \dots & x_{n+m} & u \\ y_{m+1} & \dots & y_{n+m} & y_1 & \dots & y_m & v \end{array}$$

gilt $B' \hat{=} N, N' \hat{=} B$. Analog zum ersten Abschnitt folgt unter Berücksichtigung der Vorzeichen, insbesondere von $T' = -T^T$,

$$(-\tilde{d}_0 \mid -\tilde{d}_{N'}^T) = (-d_0 \mid -d_{N'}^T) + d_{B'}^T T' = (-d_0 \mid -d_{N'}^T) - d_{B'}^T T^T,$$

d. h.

$$\begin{pmatrix} \tilde{d}_0 \\ \tilde{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_{N'} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{c}_N^T \\ \tilde{A}_N \end{pmatrix} d_{B'}.$$

Zur Bestimmung einer neuen optimalen Lösung des erweiterten Problems bietet sich das primale Simplexverfahren an, da die Basis B primal zulässig ist:

1. falls $\tilde{d}_0 \leq 0$, so ist sie bereits optimal.
2. falls $\tilde{d}_0 > 0$, so können wir das primale Simplexverfahren mit ihr starten.

Änderung eines Kostenkoeffizienten c_r

Der Kostenkoeffizient c_r soll durch $c_r + \Delta c_r$ ersetzt werden. Wir wollen feststellen, für welchen Bereich kleiner Änderungen Δc_r die aktuelle optimale Basis B optimal bleibt. Die Zulässigkeit von B bleibt ohnehin unberührt.

1. Fall $x_r \in N$. B bleibt optimal, falls

$$0 \geq c_r + \Delta c_r - c_B^T A_B^{-1} A_r = \tilde{c}_r + \Delta c_r.$$

woraus wir die Ungleichung $-\tilde{c}_r \geq \Delta c_r$ erhalten.

2. Fall $x_r \in B$ mit $r = B(i)$. B bleibt optimal, falls

$$0 \geq c_N^T - (c_B^T + \Delta c_r e_i^T) A_B^{-1} A_N = \tilde{c}_N^T - \Delta c_r e_i^T A_B^{-1} A_N.$$

Die oben angesprochenen Bereiche sind offenbar abgeschlossene, nicht notwendigerweise beschränkte Intervalle um 0. Da die reduzierten Kosten $\tilde{c}_N$ bekannt sind, genügt in Tableauform die Überprüfung der Ungleichungen

$$\Delta c_r (t_{i1}, \ldots, t_{im}) \geq \tilde{c}_N^T$$

und in revidierter Form die Überprüfung von

$$\Delta c_r v^T A_N \geq \tilde{c}_N^T,$$

wobei $v^T A_B := e_i^T$. Die Änderung des Zielfunktionswertes ist durch $z(\Delta c_r) = z + \Delta c_r x_{B(i)}$ gegeben.

Änderung des Restriktionskoeffizienten b_i

Der Koeffizient b_i soll durch $b_i + \Delta b_i$ ersetzt werden. Die optimale Basis B zu b bleibt zulässig, falls

$$0 \leq A_B^{-1}(b_i + \Delta b_i e_i) = A_B^{-1} b + \Delta b_i A_B^{-1} e_i.$$

Wir charakterisieren das gesuchte Intervall durch die Ungleichungen $\Delta b_i u \geq -x_B$ mit $A_B u := e_i$. Mit $\pi^T A_B := c_B^T$ erhält man für den Zielfunktionswert

$$c_B^T (x_B + \Delta b_i u) = z + \Delta b_i c_B^T u = z + \Delta b_i \pi_i$$

Änderung eines Koeffizienten in A_N

Wird der Koeffizient a_{ik} durch $a_{ik} + \Delta a_{ik}$ ersetzt, wobei $k \in N$ für die optimale Basis B. Die Basislösung x_B bleibt zulässig, und die Kostenkoeffizienten $\tilde{c}_j$ sind unverändert für alle $j \neq k$. Daher bleibt B optimal, falls

$$0 \geq c_k - c_B^T A_B^{-1}(A_k + \Delta a_{ik} e_i) = \tilde{c}_k - \Delta a_{ik} c_B^T A_B^{-1} e_i = \tilde{c}_k - \Delta a_{ik} \pi_i,$$

wobei π wie oben definiert ist. Durch die Ungleichung $\Delta a_{ik} \pi_i \geq \tilde{c}_k$ wird also das gesuchte Intervall charakterisiert.

Die noch nicht betrachtete Änderung eines Kostenkoeffizienten in A_B bereiten wir durch ein Lemma über die Inverse gestörter Matrizen vor.

Satz 5.1 (Inversionslemma (Formel von Sherman-Morrison)) *Sei C eine reguläre Matrix und seien $u, v \in K^m$ mit $\gamma := 1 + v^T C^{-1} u \neq 0$. Dann ist $D := C + uv^T$ regulär und $D^{-1} = C^{-1} - \frac{1}{\gamma} C^{-1} uv^T C^{-1}$. Falls $\gamma = 0$, so ist D singulär.*

Beweis. Sei $\gamma \neq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (C + uv^T)(C^{-1} - \tfrac{1}{\gamma} C^{-1} uv^T C^{-1}) &= E + uv^T C^{-1} - \tfrac{1}{\gamma} uv^T C^{-1} - \tfrac{1}{\gamma} u(\underbrace{v^T C^{-1} u}_{\gamma - 1}) v^T C^{-1} \\ &= E + \tfrac{1}{\gamma} uv^T C^{-1} [\gamma - 1 - (\gamma - 1)] = E \end{aligned}$$

Sei nun $\gamma = 0$, also $-1 = v^T C^{-1} u$ und damit insbesondere $C^{-1} u \neq 0$. Da andererseits

$$(C + uv^T) C^{-1} u = u + u(v^T C^{-1} u) = 0$$

ist $C + uv^T$ singulär. □

Änderung eines Koeffizienten in A_B

Die Änderung des Koeffizienten a_{ik} in $a_{ik} + \Delta a_{ik}$ beeinflußt die Basismatrix der aktuellen optimalen Basis B mit $k \in B$, $B(r) = k$. Die geänderte Matrix $A_B + \Delta a_{ik} e_i e_r^T$ ist nach dem Inversionslemma genau dann regulär, wenn

$$0 \neq \gamma = 1 + \Delta a_{ik} e_r^T A_B^{-1} e_i = 1 + \Delta a_{ik} u_r$$

mit $u := A_B^{-1} e_i$. Offenbar ist die geänderte Matrix für höchstens einen Wert von Δa_{ik} singulär. Dieser Punkt ist gegebenenfalls aus dem im weiteren bestimmten Intervall, in dem die neue Basisinverse optimal und zulässig ist, zu entfernen. Wir berechnen mit HIlfe des Inversionslemmas die neue Basisinverse

$$S(\delta) = A_B^{-1} - \delta A_B^{-1} e_i e_r^T A_B^{-1}$$

mit $\delta = \frac{\Delta a_{ik}}{\gamma}$. B bleibt zulässig, falls

$$0 \leq S(\delta) b = A_B^{-1} b - \delta A_B^{-1} e_i e_r^T A_B^{-1} b = x_B - \delta \cdot x_{B(r)} u.$$

Das gesuchte Intervall wird daher durch die Ungleichungen $\delta x_{B(r)} u \leq x_B$ begrenzt. B bleibt optimal, falls

$$0 \geq c_N^T - c_B^T S(\delta) A_N = \tilde{c}_N^T + \delta \underbrace{(c_B^T A_B^{-1}}_{} \pi^T e_i) \underbrace{(e_r^T A_B^{-1})}_{v^T} A_N = \tilde{c}_N^T + \delta \pi_i v^T A_N.$$

Diese Ungleichungen schränken das gesuchte (möglicherweise punktierte) Intervall weiter ein. Im revidierten Fall sind die Ungleichungen durch $\delta \pi_i v^T A_N \leq -\tilde{c}_N^T$ und bei bekannten Tableaudaten durch $\delta \pi_i (t_{r1}, \ldots, t_{rn}) \leq -\tilde{c}_N^T$ gegeben. Der neue Zielfunktionswert berechnet sich aus

$$z(\delta) = z - \delta x_{B(r)} \underbrace{c_B^T A_B^{-1}}_{\pi^T} e_i = z - \delta x_{B(r)} \pi_i.$$

Reoptimierung bei Änderungen der Koeffizienten

Wird das jeweils charakterisierte Intervall verlassen, so ist die aktuelle für das Ausgangsproblem optimale Basis B entweder nicht mehr zulässig oder nicht mehr optimal. Eine neue Optimallösung soll ausgehend von B mit einer geeigneten Variante des Simplexverfahrens bestimmt werden.

Bei Änderung von c_r in $c_r + \Delta c_r$ bleibt B primal zulässig. Da $z, \tilde{c}_N^T$ und π sich ändern können, ist B möglicherweise nicht mehr optimal. Dann verwenden wir ausgehend von B das primale Simplexverfahren zur Bestimmung eine neuen optimalen Basis.

Bei Änderung von b_i in $b_i + \Delta b_i$ bleibt B dual zulässig, aber z und x_B können sich ändern. Falls B nicht mehr (primal) zulässig ist, berechnen wir ausgehend von B eine neue optimale Basis mit Hilfe des dualen Simplexverfahrens.

Auch wenn für ein $k \in N$ a_{ik} in $a_{ik} + \Delta a_{ik}$ geändert wird, bleibt B primal zulässig, während sich $\tilde{c}_k$ und $\tilde{A}_k$ ändern können. Falls B nicht mehr optimal ist, wenden wir das primale Simplexverfahren an.

Schließlich betrachten wir für ein $k \in B$ eine zu große Änderung von a_{ik} in $a_{ik} + \Delta a_{ik}$. B ist möglicherweise weder zulässig noch optimal. Außerdem kann A_B singulär werden. Wir gehen in zwei Schritten vor.

1. Zunächst wird c_k durch ein hinreichend negatives $-M$ ersetzt, so daß die optimale Basis B' des neuen Problems die Variable x_k nicht mehr enthält. Wir benutzen dazu ausgehend von B das primale Simplexverfahren, in dem wir die Spalte zu x_k streichen, sobald die Variable die Basis verläßt.

2. Anschließend erweitern wir dieses Problem um eine neue Variable u, mit

   $$d_0 := c_k, \quad d := A_k + \Delta a_{ik} e_i.$$

   Ausgehend von B' können wir dieses Problem mit Hilfe des primalen Simplexverfahrens lösen.

Beispiel zur Sensitivitätsanalyse:

a) Einfügen einer neuen Restriktion

$$\begin{array}{lccccc} \max & x_1 & + & x_2 & & \\ \text{unter} & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 \\ & 2x_1 & - & x_2 & \leq & 3 \\ & & & x_2 & \leq & 1 \end{array}$$

Optimales Tableau $B = (3,1,2)$

		x_4	x_5
	3	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$
x_3	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
x_1	2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
x_2	1	0	-1

zusätzliche Restriktionen: $x_1 \leq 1$

$$\tilde{\beta} = \beta - a_B^T \tilde{b} = 1 - (0\ 1\ 0) \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = -1 < 0$$

$$\tilde{a}_N^T = a_N^T - a_B^T \tilde{A}_N = (0\ 0) - (0\ 1\ 0) \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = (-\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2})$$

also neue Zeile an Tableau einfügen:

x_6	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Pivotschritt ($r = 4, s = 1$) des dualen SV führt auf optimale Basis $B' = (3,1,2,4)$

b) Einführen einer neuen Variablen

Die obige Aufgabe soll um die Variable u mit $d_0 = 2, d^T = (1\ 0\ 1)$ erweitert werden:

$$\begin{array}{lcl} B = (3,1,2) & & N' = (1,4,5) \\ N = (4,5) & \stackrel{\text{dual}}{\longleftrightarrow} & B' = (2,3) \\ & & \text{mit} \quad d_4 = d_5 = 0 \end{array}$$

Mit Hilfe der Tableaudaten ergibt sich als neue Spalte zu $x_6 = u$

$$\begin{bmatrix} \tilde{d}_0 \\ \\ -\tilde{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$$

Pivotschritt ($x_2 \leftrightarrow x_6$) führt auf optimale Basis $\hat{B} = (3,1,6)$; mit $\hat{N} = (4,5,2)$ gilt $\tilde{c}_{\hat{N}}^T = (-\frac{1}{2}\ -2\ -\frac{1}{2})$.

c) Änderung eines Kostenkoeffizienten

Die Basis $B = (3,1,2)$ der obigen Aufgabe bleibt für gewisse Änderungen optimal:

1. Fall: $c_4 \rightsquigarrow c_4 + \Delta c_4$. B optimal, falls $\Delta c_4 \leq -\tilde{c}_4 = \frac{1}{2}$

2. Fall: $c_2 \rightsquigarrow c_2 + \Delta c_2$. B optimal, falls $\Delta c_2 (0\ 1) \geq (-\frac{1}{2}\ \ -\frac{3}{2})$. Also B optimal, falls $\Delta c_2 \geq -\frac{3}{2}$. Die Zielfunktion ändert sich gemäß $z(\Delta c_2) = 3 + \Delta c_2$.

d) Änderung der rechten Seite

Die Basis $B = (3, 1, 2)$ der obigen Aufgabe bleibt für gewisse Änderungen optimal; z.B. $b_1 \to b_1 + \Delta b_1$:

$$A_B u = e_1 \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

B bleibt optimal, falls $\Delta b_1 u \geq -x_B$, d.h. falls $\Delta b_1 \geq 0$. Die Zielfunktion ändert sich nicht, denn

$$z(\Delta b_1) = 3 + \Delta b_1 c_B^T u = 3 + \Delta b_1 (0\ 1\ 1) u = 3$$

e) Änderung von A_N

Die Basis $\hat{B} = (3, 1, 6)$ der erweiterten Aufgabe in b) bleibt für gewisse Änderungen optimal; z.B. sei $k = 2 \in \hat{N}$:

$$\pi^T A_{\hat{B}} = c_{\hat{B}}^T \leftrightarrow \pi^T \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (0\ 1\ 2) \rightsquigarrow \pi^T = (0 \quad \frac{1}{2} \quad 2)$$

Also etwa für $i = 3$ wegen $\tilde{c}_2 = -\frac{1}{2}$: $\hat{B}$ optimal, falls $-\frac{1}{2} \leq 2\Delta a_{32}$, das heißt, falls $\Delta a_{32} \geq -\frac{1}{4}$.

f) Änderung von A_B

Die Basis $B = (3, 1, 2)$ der obigen Aufgabe bleibt für gewisse Änderungen optimal; z.B. $i = 3, k = 1$, also $r = 2$:

$$A_B u = e_3 \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow u = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Die geänderte Basismatrix bleibt regulär, falls $0 \neq \gamma = 1 + \Delta a_{ik} u_r = 1 + \frac{1}{2}\Delta a_{31}$ also falls $\Delta a_{31} \neq -2$.

Die Basis bleibt zulässig, falls:

$$\frac{\Delta a_{31} x_{B(2)}}{1+\frac{1}{2}\Delta a_{31}}\, u \le x_B \rightsquigarrow \frac{\Delta a_{31} 2}{1+\frac{1}{2}\Delta a_{31}} \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Falls $\Delta a_{31} > -2$, so muß gelten $(-5\Delta a_{31}\ \Delta a_{31}\ 2\Delta a_{31}) \le (0\ 2+\Delta a_{31}\ 1+\frac{1}{2}\Delta a_{31})$ d.h. $0 \le \Delta a_{31} \le \frac{2}{3}$. Für $\Delta a_{31} < -2$ liefert $\Delta a_{31} \ge 2 + \Delta a_{31}$ einen Widerspruch.

Die Basis bleibt optimal für

$$\frac{\Delta a_{31}\pi_3}{1+\frac{1}{2}\Delta a_{31}}(t_{21}\ t_{22}) \ge \tilde{c}_N^T$$

π kann man wegen $\tilde{c}_{n+j} = c_{n+j} - \pi^T A_{n+j} = -\pi_j$ $(1 \le j \le m)$ aus den Tableaudaten ablesen:

$$\pi_j = \begin{cases} -\tilde{c}_{n+j}, & \text{falls } n+j \in N; \\ 0, & \text{falls } n+j \in B. \end{cases}$$

Hier ist $\pi_3 = \frac{3}{2}$. Also ist B optimal, falls

$$\frac{3}{2}\Delta a_{31}(\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}) \le (1+\frac{1}{2}\Delta a_{31})(\frac{1}{2}\ \frac{3}{2})$$

Diese Ungleichungen gelten für $0 \le \Delta a_{31} \le \frac{2}{3}$ ebenfalls, d.h. B ist dann zulässig und optimal. Der Zielfunktionswert ändert sich gemäß

$$z(\Delta a_{31}) = z - \frac{\Delta a_{ik} x_{B(r)} \pi_i}{1+\Delta a_{ik} u_r} = 3 - \frac{\Delta a_{31}\cdot 2 \cdot \frac{3}{2}}{1+\frac{1}{2}\Delta a_{31}},$$

verringert sich also für die erlaubten Werte von Δa_{31}.

Reoptimierung bei zu großer Änderung von A_B

Im obigen Beispiel soll

$$A_1 \to \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = A_1 + e_3$$

Wegen $\Delta a_{31} = 1 > \frac{2}{3}$ bleibt $B = (3,1,2)$ nicht zulässig.

1. Schritt $c_1 \to -5$, d.h. $\Delta c_1 = -6$. Als Änderung gemäß c) findet man

$$\begin{aligned} \tilde{c}_N^T(-6) &= \tilde{c}_N^T - (0\ -6\ 0)\tilde{A}_N = (\frac{5}{2}\ \frac{3}{2}) \\ z(-6) &= z + 2\Delta c_1 = 3 - 12 = -9 \end{aligned}$$

2. Schritt Die neue Spalte ergibt sich gemäß b)

$$\begin{bmatrix} \\ \tilde{d}_0 \\ \\ -\tilde{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{15}{2} \\ \frac{5}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$$

Damit erhält man das Tableau:

		x_4	x_5	u
	-9	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{15}{2}$
x_3	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$
x_1	2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$
x_2	1	0	-1	$\boxed{-1}$

$\longrightarrow$

		x_4	x_5	x_2
	$-\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	-6	$-\frac{15}{2}$
x_3	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$
x_1	$\frac{1}{2}$	$\boxed{-\frac{1}{2}}$	1	$\frac{3}{2}$
u	1	0	-1	-1

$\longrightarrow$

		x_1	x_5	x_2
	1	-5	-1	0
x_3	3			
x_4	3			
u	1			

Man kann nun die überflüssige Spalte zu x_1 streichen; in diesem Beispiel ist gleichzeitig die Optimallösung bestimmt.

6 Darstellung von Polyedern

Bisher haben wir Polyeder stets explizit als Schnitt von Halbräumen beschrieben:

$$P(A, b) = \{x \mid Ax \leq b\}.$$

Mögliche Vorzeichenbeschränkungen sind hierbei im Restriktionensystem enthalten. In dieser Schreibweise bezeichen wir alle Variablen x_j als *freie* Variablen. Alternativ kann man Polyeder als konvexe Hülle von Punkten oder durch nichtnegative Kombination von Richtungsvektoren beschreiben:

Intuitiv scheint klar, daß dabei die Angabe der Ecken und gewisser "extremaler" Richtungen genügen sollte. Bevor wir diesen Zusammenhang genauer untersuchen, müssen wir zunächst die Korrespondenz von Ecken und Basislösungen in Gegenwart freier Variablen neu charakterisieren.

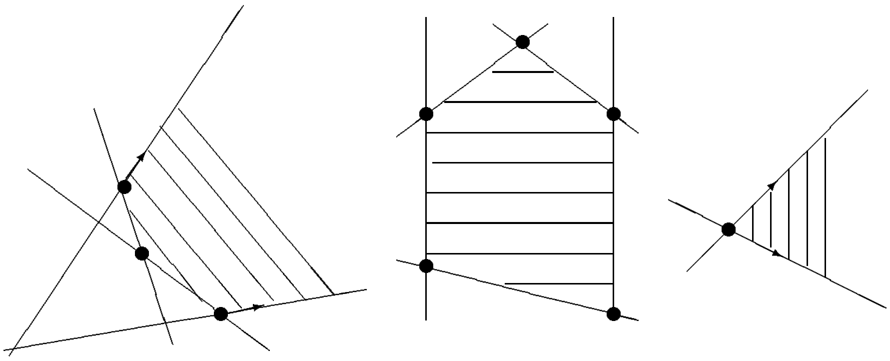


Abbildung I.1: Ecken und Extremalrichtungen eines Polyeders P

Ecken und zulässige Basislösungen

Sei $H_i = \{x \mid a_i^T x = b_i\}, H_I = \bigcap_{i \in I} H_i, I(\bar{x}) = \{i \mid a_i^T \bar{x} = b_i\}$. Nach unserer früheren Definition ist $\bar{x} \in P(A,b)$ Ecke genau dann, wenn $\{\bar{x}\} = H_{I(\bar{x})}$. $\bar{x}$ ist also eindeutig als Schnittpunkt derjenigen Randhyperebenen definiert, die $\bar{x}$ enthalten.

Nach Einführung von vorzeichenbeschränkten Schlupfvariablen, also

$$P = \{x \mid \underbrace{Ax + y}_{\bar{A}=(A|E)} = b, y \geq 0\} =: \{x \mid \bar{A}x = b, x_{n+i} \geq 0, 1 \leq i \leq m\}$$

ist die zulässige Basislösung zu einer regulären Teilmatrix $\bar{A}_B$ charakterisiert durch

$$\bar{A}_B x_B = b, x_N = 0, x_{B(i)} \geq 0 \quad \forall\ B(i) > n.$$

Da die Hyperebenen $x_1 = 0, x_2 = 0$ in der folgenden Abbildung keine Randhyperebenen sind, kann $B = (3,4,5)$ keine Ecke sein. $N \subseteq \{y_1, \ldots, y_m\} = \{x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}\}$ ist offenbar eine notwendige Bedingung für Ecken.

Satz 6.1 *x_* ist Ecke von $P(A,b)$ genau dann, wenn das System*

$$Ax + y = b, \quad y \geq 0$$

eine zulässige BL (x,y) besitzt, für die gilt:

1. $x_* = x$,
2. $x_1, \ldots, x_n$ *sind Basisvariable.*

Beweis. Sei (x,y) zulässige Basislösung. Dann ist $x \in P(A,b)$ und (x,y) ist weiterhin eindeutige Lösung von

$$(+) \qquad y_N = 0, Ax + y = b, y \geq 0$$

d. h. $\{x\} = H_N$. Umgekehrt folgt hieraus, daß $(+)$ eindeutig lösbar ist, insbesondere $y = b - Ax$. Dann muß $\bar{A}_B$ regulär sein, d. h. (x,y) ist zulässige Basislösung. □

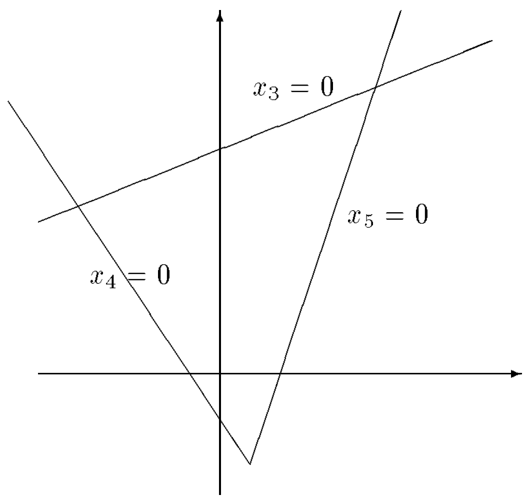


Abbildung I.2: $B = (3, 4, 5)$, $N = (1, 2)$ definiert keine Ecke

Homogene Systeme

Im homogenen Fall, $P(A, 0) = \{x \mid Ax \leq 0\}$, ist das Polyeder ein Kegel. Mit jeder Lösung ist die Halbgerade aller nichtnegativen Vielfachen enthalten. Diese Halbgeraden heißen *zulässige* Richtungen.

Die einzige mögliche Ecke des Kegels ist 0. Sei $\bar{A}_B$ regulär. Dann können wir durch Erhöhen oder Absenken einer der Nichtbasisvariablen, etwa $k \in N$, gewisse zulässige Richtungen des Kegels beschreiben. Diese sind nichtnegative Vielfache der, wenn existierenden, eindeutigen Lösung des Systems

$$\bar{A}_B x_B + \bar{A}_k x_k = 0, x_k = 1, x_{N \setminus k} = 0, x_{B(i)} \geq 0 \quad \forall\, B(i) > n$$

oder des Systems

$$\bar{A}_B x_B + \bar{A}_k x_k = 0, x_k = -1, x_{N \setminus k} = 0, x_{B(i)} \geq 0 \quad \forall\, B(i) > n,$$

wobei $\bar{A}_B$ regulär, $|B| = m$. Die Eindeutigkeit folgt aus der resultierenden Regularität der erweiterten Matrix

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_B & \bar{A}_k \\ & 1 \end{bmatrix}.$$

Diese Lösungen bezeichnen wir als zulässige *Extremalrichtungen*. Auch bei inhomogenen Systemen $Ax \leq b$ entspricht jeder Lösung des homogenen Systems $Av \leq 0$ eine zulässige Richtung $\{x + \lambda v \mid \lambda \geq 0\}$.

Zulässige Extremalrichtungen im SV

Mit Hilfe des Simplexverfahrens lassen sich in jeder Ecke die zugehörigen Extremalrichtungen berechnen. Sei B eine zum Polyeder $P = \{x \mid Ax + y = b, y \geq 0\}$ zugehörige Basis,