Abteilung für Mathematische Optimierung
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor Fekete
Dr. Laura Heinrich-Litan

WS 2003/04

Lineare Optimierung
Anlage 6: Ein Beispiel zur Sensitivitätsanalyse

Änderung von A_B

Betrachte folgendes Beispiel:

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & x_1 & + & x_2 & & \\ \text{unter} & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 \\ & 2x_1 & - & x_2 & \leq & 3 \\ & & & x_2 & \leq & 1 \\ & & & x & \geq & 0 \end{array}$$

Optimales Tableau $B = (3,1,2)$

		x_4	x_5
	3	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$
x_3	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
x_1	2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
x_2	1	0	-1

Die Basis $B = (3,1,2)$ der obigen Aufgabe bleibt für gewisse Änderungen optimal; z.B. $i = 3, k = 1$, also $r = 2$:

$$A_B u = e_3 \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow u = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Die geänderte Basismatrix bleibt regulär, falls $0 \neq \gamma = 1 + \Delta a_{ik} u_r = 1 + \frac{1}{2}\Delta a_{31}$ also falls $\Delta a_{31} \neq -2$.

Die Basis bleibt zulässig, falls:

$$\frac{\Delta a_{31} x_{B(2)}}{1 + \frac{1}{2}\Delta a_{31}}\, u \leq x_B \rightsquigarrow \frac{\Delta a_{31} 2}{1 + \frac{1}{2}\Delta a_{31}} \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Falls $\Delta a_{31} > -2$, so muß gelten $(-5\Delta a_{31}\ , \Delta a_{31}\ , 2\Delta a_{31}) \leq (0\ , 2+\Delta a_{31}\ , 1+\frac{1}{2}\Delta a_{31})$ d.h. $0 \leq \Delta a_{31} \leq \frac{2}{3}$.
Für $\Delta a_{31} < -2$ liefert $\Delta a_{31} \geq 2 + \Delta a_{31}$ einen Widerspruch.

Die Basis bleibt optimal für

$$\frac{\Delta a_{31} y_3}{1 + \frac{1}{2}\Delta a_{31}} (t_{21}\ t_{22}) \geq \bar{c}_N^T$$

y kann man wegen $\bar{c}_{n+j} = c_{n+j} - y^T A_{n+j} = -y_j$ $(1 \leq j \leq m)$ aus den Tableaudaten ablesen:

$$y_j = \begin{cases} -\bar{c}_{n+j}, & \text{falls } n+j \in N; \\ 0, & \text{falls } n+j \in B. \end{cases}$$

Hier ist $y_3 = \frac{3}{2}$. Also ist B optimal, falls

$$\frac{3}{2}\Delta a_{31} (\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}) \leq (1 + \frac{1}{2}\Delta a_{31})(\frac{1}{2}\ \frac{3}{2})$$

Diese Ungleichungen gelten für $0 \leq \Delta a_{31} \leq \frac{2}{3}$ ebenfalls, d.h. B ist dann zulässig und optimal. Der Zielfunktionswert ändert sich gemäß

$$z(\Delta a_{31}) = z - \frac{\Delta a_{ik} x_{B(r)} y_i}{1 + \Delta \frac{1}{2} a_{ik}} = 3 - \frac{\Delta a_{31} \cdot 2 \cdot \frac{3}{2}}{1 + \frac{1}{2}\Delta a_{31}},$$

verringert sich also für die erlaubten Werte von Δa_{31}.

Reoptimierung bei zu großer Änderung von A_B

Schließlich betrachten wir für ein $k \in B$ eine zu große Änderung von a_{ik} in $a_{ik} + \Delta a_{ik}$. B ist möglicherweise weder zulässig noch optimal. Außerdem kann A_B singulär werden. Wir gehen in zwei Schritten vor.

1. Zunächst wird c_k durch ein hinreichend negatives $-M$ ersetzt, so daß die optimale Basis B' des neuen Problems die Variable x_k nicht mehr enthält. Wir benutzen dazu ausgehend von B das primale Simplexverfahren, in dem wir die Spalte zu x_k streichen, sobald die Variable die Basis verläßt.

2. Anschließend erweitern wir dieses Problem um eine neue Variable u, mit
$$d_0 := c_k, \quad d := A_k + \Delta a_{ik} e_i.$$
Ausgehend von B' können wir dieses Problem mit Hilfe des primalen Simplexverfahrens lösen.

Im obigen Beispiel soll
$$A_1 \to \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = A_1 + e_3$$
Wegen $\Delta a_{31} = 1 > \frac{2}{3}$ bleibt $B = (3,1,2)$ nicht zulässig.

1. Schritt $c_1 \to -5$, d.h. $\Delta c_1 = -6$. Als Änderung findet man
$$\begin{aligned} \bar{c}_N^T(-6) &= \bar{c}_N^T - (0 \ \ -6 \ \ 0)\bar{A}_N = (\tfrac{5}{2} \ \tfrac{3}{2}) \\ z(-6) &= z + 2\Delta c_1 = 3 - 12 = -9 \end{aligned}$$

2. Schritt Die neue Spalte ergibt sich:
$$\begin{bmatrix} \bar{d}_0 \\ \\ -\bar{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{15}{2} \\ \frac{5}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$$

Damit erhält man das Tableau:

		x_4	x_5	u
	-9	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{15}{2}$
x_3	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$
x_1	2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$
x_2	1	0	-1	$\boxed{-1}$

$\longrightarrow$

		x_4	x_5	x_2
	$-\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	-6	$-\frac{15}{2}$
x_3	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$
x_1	$\frac{1}{2}$	$\boxed{-\frac{1}{2}}$	1	$\frac{3}{2}$
u	1	0	-1	-1

$\longrightarrow$

		x_1	x_5	x_2
	1	-5	-1	0
x_3	3			
x_4	3			
u	1			

Man kann nun die überflüssige Spalte zu x_1 streichen; in diesem Beispiel ist gleichzeitig die Optimallösung bestimmt.