Abteilung für Mathematische Optimierung
TU Braunschweig

WS 2003/04

Prof. Dr. Sándor Fekete
Dr. Laura Heinrich-Litan

Lineare Optimierung
Anlage 2: Das Simplexverfahren mit freien Variablen

Problem: Bestimme eine optimale Lösung des linearen Programms

$$\max\{c^T x \mid Ax \leq b;\ x_L \geq 0\}, \quad \text{wobei } b \geq 0 \text{ und } L \subseteq \{1, \ldots, n\}.$$

Ausgangsdaten:

$$(t_{ij}) := \begin{pmatrix} 0 & c^T \\ b & -A \end{pmatrix}; \qquad 0 \leq i \leq m; \quad 0 \leq j \leq n;$$

$$B := (n+1, \ldots, n+m), \qquad N := (1, \ldots, n).$$

Hierbei ist $K = \{1, \ldots, n\} \setminus L$, die Menge der Indizes der freien (nichtvorzeichenbeschränkten) Variablen.

Der Algorithmus:

1. **Optimalität:** Ist ein $t_{0j} > 0$ für $N(j) \notin K$ oder ein $t_{0j} \neq 0$ für $N(j) \in K$, so gehe nach 2. Anderenfalls ist eine Optimallösung erreicht. Setze

   $$x_{B(i)} := t_{i0}, \quad (1 \leq i \leq m); \qquad x_{N(j)} := 0, \quad (1 \leq j \leq n); \qquad \bar{z} := t_{00}.$$

   Stop.

2. **Bestimmung der Austauschspalte:** Man wähle den Index s so, daß

   $$| t_{0s} | = \max \left\{ \max_{N(j) \notin K} t_{0j},\ \max_{N(j) \in K} | t_{0j} | \right\}.$$

   Ist $t_{0s} > 0$, so gehe nach 3. Anderenfalls gehe nach 4.

3. **Endlichkeitskriterium bei Vergrößerung von $x_{N(s)}$:** Ist die Menge

   $$I := \{i \mid t_{is} < 0,\ B(i) \notin K\}$$

   leer, so existiert keine endliche Lösung. Terminiere. Anderenfalls gehe nach 5.

4. **Endlichkeitskriterium bei Verkleinerung von $x_{N(s)}$:** Ist die Menge

   $$I := \{i \mid t_{is} > 0,\ B(i) \notin K\}$$

   leer, so existiert keine endliche Lösung. Terminiere. Anderenfalls gehe nach 5.

5. **Bestimmung der Austauschzeile:** Man wähle den Index r so, daß

   $$\frac{t_{r0}}{| t_{rs} |} = \min \left\{ \frac{t_{i0}}{| t_{is} |} \;\middle|\; i \in I \right\}.$$

6. **Pivotoperation:** Vertausche die r-te Komponente von B mit der s-ten Komponente von N und setze wie üblich

$$\begin{array}{lcll}
\bar{t}_{rs} & := & \frac{1}{t_{rs}}; & \\
\bar{t}_{rj} & := & -\frac{t_{rj}}{t_{rs}}, & \text{für } j = 0, \ldots, n,\ j \neq s; \\
\bar{t}_{is} & := & \frac{t_{is}}{t_{rs}}, & \text{für } i = 0, \ldots, m,\ i \neq r; \\
\bar{t}_{ij} & := & t_{ij} - \frac{t_{is}\, t_{rj}}{t_{rs}}, & \text{für } i = 0, \ldots, m,\ i \neq r \text{ und } j = 0, \ldots, n,\ j \neq s.
\end{array}$$

Nun ersetze $t_{ij} := \bar{t}_{ij}$, für $0 \leq i \leq m$, $0 \leq j \leq n$ und gehe nach 1.