Abteilung für Mathematische Optimierung
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor Fekete
Laura Heinrich-Litan

WS 2002/03

Lineare Optimierung
Übung 10 vom 10.01.03

Abgabe der Aufgaben bis 13:00 Uhr am **Freitag, 17.01.03** durch Einwurf in den Übungskasten im vierten Stock des Forumsgebäudes

Aufgabe 1 (Doppelt stochastische Matrizen und Perfektes Matching):

(a) Eine quadratische Matrix $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$ heisst *doppelt stochastisch*, wenn

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_{i,j} &= 1 \quad \text{für} \quad j = 1, \ldots, n \\ \sum_{j=1}^n a_{i,j} &= 1 \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, n \\ a_{i,j} &\geq 0 \quad \text{für} \quad i, j = 1, \ldots, n\ . \end{aligned} \tag{1}$$

Eine *Permutations-Matrix* ist eine $\{0,1\}$-Matrix mit genau einer 1 in jeder Zeile und jeder Spalte.

Zeige: Eine Matrix A ist doppelt stochastisch, genau dann wenn sie Konvexkombination von Permutations-Matrizen ist.

(Tipp: Sei P das durch (1) beschriebene Polytop in $\mathbb{R}^{n^2}$. Beweise eine Richtung der Aussage zuerst für die Ecken von P durch Induktion.)

(b) Ein *perfektes Matching* in einem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ ist eine Kantenmenge $M \subseteq E$, die zu jedem $v \in V$ genau eine inzidente Kante enthält, d.h. für genau ein $e \in M$ gilt $v \in \delta(e)$.

Das Polytop der perfekten Matchings von G (kurz $PMP(G)$) ist die konvexe Hülle der charakteristischen Vektoren von perfekten Matchings in G, also ein Polyeder im $\mathbb{R}^{|E|}$. Beweise:

- Jeder Vektor $x \in PMP(G)$ erfüllt:

$$\begin{aligned} \sum_{v \in \delta(e)} x_e &= 1 \quad \text{für alle} \quad v \in V \\ x_e &\geq 0 \quad \text{für alle} \quad e \in E\ . \end{aligned} \tag{2}$$

- Ist G ein bipartiter Graph, dann ist $PMP(G)$ genau das durch (2) beschriebene Polyeder. (Tipp : Verwende Aufgabe 1.(a).)

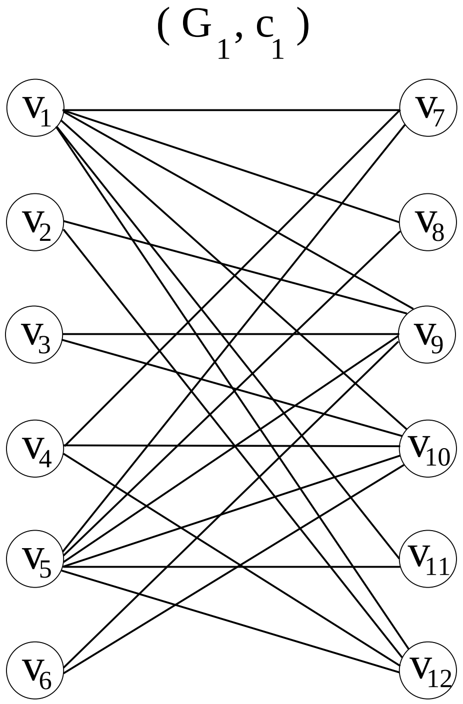
(15+15 Punkte)

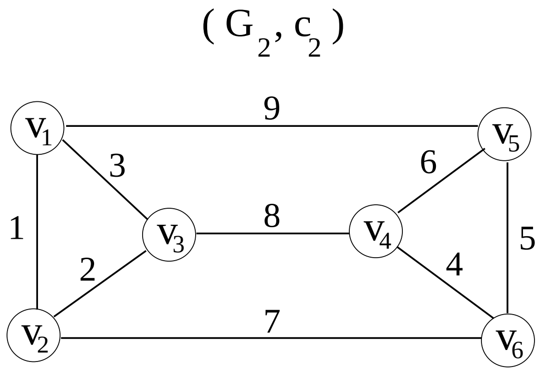
Aufgabe 2 (CPLEX):

Betrachte das *Minimum Weight Perfect Matching* (MWPM) Problem:

> Gegeben sei ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine Gewichtsfunktion $c : E \to \mathbb{R}^+$. Finde ein perfektes Matching $M \subseteq E$ in G mit minimalem Gewicht $c(M) := \sum_{e \in M} c(e)$ oder entscheide, dass es kein perfektes Matching gibt.

Betrachte folgende Beispiel-Graphen (G_1, c_1) und (G_2, c_2):





wobei alle Kanten in G_1 Gewicht 1 haben.

Löse mit Hilfe von CPLEX die linearen Programme LP_1 und LP_2 zu dem MWPM-Problem für jeweils (G_1, c_1) und (G_2, c_2). Interpretiere die Lösungen und gib gegebenenfalls optimale Lösungen für die zugehörigen Matching-Probleme an.

Gib zusätzlich die Werte der dualen Variablen zu LP_1 an und interpretiere diese Variablen. Beweise, dass die berechnete optimale Lösung zu LP_1 das MWPM-Problem für (G_1, c_1) löst.

Löst LP_2 das MWPM-Problem für (G_2, c_2) ? Falls nicht, modifiziere LP_2 durch wiederholtes Hinzufügen von zusätzlichen Bedingungen und versuche dadurch das MWPM-Problem für (G_2, c_2) zu lösen. Löse diese neue LPs auch mit CPLEX.

Gib jeweils Deine Eingabedateien und die Dateien mit Deinen Befehlen und Ergebnissen ab. **(30 Punkte)**