Abteilung für Mathematische Optimierung
TU Braunschweig

WS 2002/03

Prof. Dr. Sándor Fekete
Laura Heinrich-Litan

Lineare Optimierung
Übung 8 vom 13.12.02

Abgabe der Aufgaben bis 13:00 Uhr am **Freitag, 20.12.02.** durch Einwurf in den Übungskasten im vierten Stock des Forumsgebäudes

Aufgabe 1 (Max-Flow-Problem):

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph, $s \in V$ ein Startknoten und $t \in V$, $s \neq t$ ein Zielknoten. Der Startknoten hat keine eingehenden Kanten, der Zielknoten hat keine ausgehenden Kanten. Es sei außerdem eine Funktion $c : E \to \mathbb{R}^+$ gegeben, die jeder Kante eine nichtnegative Kapazität zuweist. Ein *Fluss* für (G, c) ist eine Abbildung $f : E \to \mathbb{R}^+$, so dass

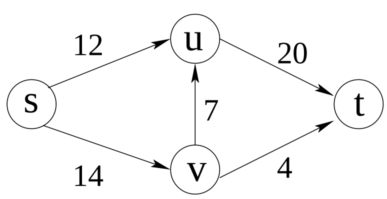
$$\begin{aligned} 0 \leq f(e) &\leq c(e) && \text{für alle} \quad e \in E \quad \text{und} \\ \sum_{(u,v)\in E} f(u,v) &= \sum_{(v,u)\in E} f(v,u) && \text{für alle} \quad v \in V \setminus \{s,t\}, \end{aligned}$$

wobei $f(u, v) := f(e)$ für eine gerichtete Kante $e = (u, v)$ geschrieben wird. Die erste Gleichung sagt, dass für jede Kante der mögliche Fluss beschränkt ist. Die zweite Gleichung sagt, dass in jeden Knoten $v \in V \setminus \{s, t\}$ gleich viel hinein- wie herausfließt. Startknoten s ist Quelle des Flusses und Zielknoten t ist Senke des Flusses. Ziel ist es, einen maximalen Fluss zu finden, d.h. einen Fluss, der den *Flusswert*

$$|f| := \sum_{(s,u)\in E} f(s,u)$$

maximiert. Das Problem ist bekannt als das Max-Flow-Problem.

(a) Betrachte folgendes Beispiel:



Formuliere das Max-Flow-Problem dazu als lineares Programm (P) und löse es.

(b) Bestimme das duale Programm (D) zu (P), aus der Aufgabe 1.(a), und gib eine optimale Lösung y^* für (D) an.

(c) Sei $(X, \bar{X})$ ein s-t-Schnitt : $X \cap \bar{X} = \emptyset$, $X \cup \bar{X} = V$, $s \in X$ und $t \in \bar{X}$. Die Kapazität $c(X, \bar{X})$ dieses Schnittes ist die Summe der Kapazitäten der Kanten, die von X nach $\bar{X}$ gehen. Zeige, dass y^* einem Schnitt entspricht, dessen Kapazität gleich dem maximalen Fluss ist.

(10+10+10 Punkte)

Aufgabe 2 (Ellipsoidmethode):

In der j-ten Iteration der Ellipsoidmethode seien $a_j = (0,0)^T$, $A_j = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ gegeben, und sei $x + y \leq -1$ eine der Ungleichungen. Stelle diese Situation graphisch dar. Bestimme a_{j+1} und A_{j+1} und stelle das zugehörige Ellipsoid graphisch dar. **(10 Punkte)**

Aufgabe 3 :

Seien $P = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ und $Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Bx \leq d, x \geq 0\}$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Sei $v = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ eine beliebige Ecke von P und sei v_i, $1 \leq i \leq 5$, eine beliebige Koordinate von v. Gib obere Schranken für den Absolutbetrag des Zählers von v_i, für den Absolutbetrag des Nenners von v_i und für $|v_i|$ an. Verwende dazu Theorem 12.11 aus der Vorlesung. Löse die selbe Aufgabe für eine beliebige Ecke $q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ von Q.

(b) Verbessere diese Schranken deutlich unter Verwendung der Cramerschen Regel mit den konkreten Matrizen.

(10+10 Punkte)