Abteilung für Mathematische Optimierung
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor Fekete
Laura Heinrich-Litan

WS 2002/03

Lineare Optimierung
Übung 6 vom 29.10.02

Abgabe der Aufgaben bis 13:00 Uhr am **Freitag, 6.12.02.** durch Einwurf in den Übungskasten im vierten Stock des Forumsgebäudes

Aufgabe 1 (Basisaustausch):

Gegeben sei eine Basis A_B einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ mit $\operatorname{rang}(A) = m$. Sei $B = (p_1, \dots, p_m) \in \{1, \dots, n\}^m$ der zugehörige Spaltenindexvektor für Basis A_B. Wir bezeichnen mit A_N die Nichtbasis von A und sei $N = (q_1, \dots, q_{n-m}) \in \{1, \dots, n\}^{n-m}$ der zugehörige Spaltenindexvektor für Nichtbasis A_N. Wir setzen

$$\bar{A} := A_B^{-1} A_N = (\bar{a}_{ij}) \in \mathbb{K}^{m\times n-m}.$$

Ist $\bar{a}_{rs} \neq 0$, so ist $A_{B'}$ mit $B' := (p_1, \dots, p_{r-1}, q_s, p_{r+1}, \dots, p_m)$ eine Basis von A.

(a) Sei $d := A_{\cdot q_s}$ die q_s-te Spalte von A, und $\bar{d} := A_B^{-1} d$. Gib die Elemente der Matrix $A_B^{-1} A_{B'}$ in Abhängigkeit von $\bar{d}$ an.

(b) Beweise $A_{B'}^{-1} = E A_B^{-1}$, wobei E folgende Elementarmatrix ist:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & & -\bar{d}_1/\bar{d}_r & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & 1 & -\bar{d}_{r-1}/\bar{d}_r & & & \\ & & & 1/\bar{d}_r & & & \\ & & & -\bar{d}_{r+1}/\bar{d}_r & 1 & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & -\bar{d}_m/\bar{d}_r & & & 1 \end{pmatrix}.$$

(10+10 Punkte)

Aufgabe 2 (Revidierte Simplexmethode):

Löse das folgende Problem mit Hilfe der revidierten Simplexmethode.

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl} \max & 3x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & - & 3x_4 & & \\ \text{unter} & x_1 & & & + & x_3 & - & x_4 & \leq & 1 \\ & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & \leq & 2 \\ & & & & & & & x & \geq & 0 \end{array}$$

(10 Punkte)

Aufgabe 3 (Dualität bei unbeschränkten Problemen):

Betrachte folgendes Paar dualer linearer Programme:

$$
\begin{array}{rrcl}
(P) & \max & c^T x & \\
 & \text{unter} & Ax & = & b \\
 & & x & \geq & 0
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rrcl}
(D) & \min & y^T b & \\
 & \text{unter} & y^T A & \geq & c^T
\end{array}
$$

Seien $P = \{x \mid Ax = b\}$ und $D = \{y \mid y^T A \geq c^T\}$ die Lösungsmengen von (P) bzw. (D).

(a) Sei $P \neq \emptyset$. Zeige : $c^T x$ nach oben unbeschränkt $\iff D = \emptyset$.

(b) Sei $D \neq \emptyset$. Zeige : $y^T b$ nach unten unbeschränkt $\iff P = \emptyset$.

(10 Punkte)

Aufgabe 4 (Duale Simplexmethode):

(a) Gegeben sei ein lineares Optimierungsproblem (P) der Form

$$
\begin{array}{rcl}
\max & c^T x & \\
Ax & \geq & b \\
x & \geq & 0
\end{array}
$$

wobei $c \leq 0$. Bringe (P) in Standardform mit Hilfe von Schlupfvariablen und gib eine dual zulässige Basis dazu an.

(b) Löse das folgende Problem mit Hilfe der dualen Simplexmethode.

$$
\begin{array}{rrcrcl}
\max & -3x_1 & - & x_2 & & \\
\text{unter} & x_1 & + & x_2 & \geq & 1 \\
 & 2x_1 & + & 3x_2 & \geq & 2 \\
 & & & x & \geq & 0
\end{array}
$$

(c) Betrachte das Paar dualer linearer Programme (P) und (D) aus der Aufgabe 3. Sei A_B eine dual zulässige Basis von A. Die zugehörige Basislösung $y^T = c_B^T A_B^{-1}$ für das Problem (D) heisst dual zulässig. Zeige : ein Vektor y ist genau dann eine Ecke von $D = \{y \mid y^T A \geq c^T\}$, wenn y eine dual zulässige Basislösung ist.

(5+5+10 Punkte)