Abteilung für Mathematische Optimierung
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor Fekete
Laura Heinrich-Litan

WS 2002/03

Lineare Optimierung
Übung 5 vom 22.10.02

Abgabe der Aufgaben bis 13:00 Uhr am **Freitag, 29.11.02.** durch Einwurf in den Übungskasten im vierten Stock des Forumsgebäudes

Aufgabe 1 (Simplexverfahren):

Löse die folgenden lineare Programme mit Hilfe der 2-Phasen-Methode. Benutze dabei folgende Pivotregeln: als Pivotspalte wird jeweils die mit dem kleinsten negativen Kostenkoeffizienten gewählt; kommen zwei verschiedene Zeilen zum Pivotisieren in Frage, dann wird die mit dem kleinsten Variablenindex gewählt.

(a)

$$
\begin{array}{rrcrcrcl}
\min & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & & \\
\text{unter} & 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\
& x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & = & 2 \\
& 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 5 \\
& 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & 1 \\
& x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

(b)

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcl}
\min & 2x_1 & - & 4x_2 & +1 & & & & & \\
\text{unter} & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 1 \\
& x_1 & + & 2x_2 & & & - & x_4 & = & -11 \\
& & & & & -3 & \leq & x_2 & \leq & 10 \\
& & & & & & & 2x_3 & \geq & 3
\end{array}
$$

(c) Schreibe folgendes lineare Programm in Standardform durch Einführen von Schlupfvariablen x_5, x_6, x_7 für die drei Ungleichungen. Rechne sechs Pivotschritte durch und diskutiere das Ergebnis. Was ist in Bezug auf die Endlichkeit der Simplexmethode zu schliessen ?

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcl}
\min & -\frac{3}{4}x_1 & + & 20x_2 & - & \frac{1}{2}x_3 & + & 6x_4 & & \\
\text{unter} & \frac{1}{4}x_1 & - & 8x_2 & - & x_3 & + & 9x_4 & \leq & 0 \\
& \frac{1}{2}x_1 & - & 12x_2 & - & \frac{1}{2}x_3 & + & 3x_4 & \leq & 0 \\
& & & & & & & x_3 & \leq & 1 \\
& x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & \geq & 0
\end{array}
$$

(10+10+10 Punkte)

Aufgabe 2 (Basen):

Seien $c = (-2,-2,1,-4)^T$, $b = (6,3,2)^T$ und $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & t \end{pmatrix}$. Bestimme eine optimale Basis B von $\min\{c^T x \mid Ax \leq b,\ x \geq 0\}$ für $t = 0$. Benutze dabei die in der Aufgabe 1 beschriebenen Pivotregeln. Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist B eine Basis, zulässige Basis, optimale Basis? **(10 Punkte)**

Aufgabe 3 (Unimodulare Matrizen und Ganzzahligkeit):

Eine Matrix A heisst *total unimodular*, wenn die Determinante jeder quadratischen Untermatrix von A einen Wert -1, 0 oder 1 hat.

(a) Gegeben sei folgende 3×3 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ist die Matrix A total unimodular ? Begründe die Aussage.

(b) Gegeben sei die Matrix A aus Aufgabe 3(a). Zeige, dass für alle ganzzahligen Vektoren $b \in \mathbb{R}^3$, für die $P(b) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = b\}$ nicht leer ist, alle Ecken von $P(b)$ ganzzahlig sind.

(c) Seien b und c ganzzahlige Vektoren und A eine total unimodulare Matrix. Beweise, dass die Polyeder $\{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$ und $\{x \mid Ax \leq b, 0 \leq x \leq c\}$ nur ganzzahlige Ecken haben.

Hinweis: Zeige zuerst, dass für eine gegebene total unimodulare Matrix B das Polyeder $P(B,d) = \{x \mid Bx \leq d\}$ nur ganzzahlige Ecken besitzt. Verwende dies im nächsten Schritt, um die entsprechenden Aussagen für die obigen Polyeder herzuleiten.

(5+5+10 Punkte)