Abteilung für Mathematische Optimierung
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor Fekete
Laura Heinrich-Litan

WS 2002/03

Lineare Optimierung
Übung 4 vom 15.10.02

Abgabe der Aufgaben bis 13:00 Uhr am **Freitag, 22.11.02.** durch Einwurf in den Übungskasten im vierten Stock des Forumsgebäudes

Aufgabe 1 (Maximum-Clique-Problem):

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Eine *Clique* in G ist eine Knotenmenge $K \subseteq V$, so dass für $v, w \in K$ gilt $\{v, w\} \in E$. Eine unabhängige Menge in G ist eine Knotenmenge $U \subseteq V$, so dass für $v, w \in U$ gilt $\{v, w\} \notin E$.

(a) Der komplementäre Graph zu G ist der Graph $G^c = (V, E^c)$, so dass

$$\{v, w\} \in E^c \iff \{v, w\} \notin E.$$

Zeige: K ist eine Clique in $G \iff K$ ist eine unabhängige Menge in G^c.

(b) Das Maximum-Clique-Problem besteht darin, eine Clique K maximaler Grösse in einem Graphen $G = (V, E)$ zu finden.

Formuliere ein lineares Programm (P) zum Maximum Clique Problem, so dass die ganzzahligen Lösungen des linearen Programms (P) genau den Cliquen in G entsprechen.

(c) Leite das zu (P) duale lineare Programm (D) her. Gib eine Interpretation von (D) als Optimierungsproblem an.

(5+5+5 Punkte)

Aufgabe 2 (Traveling-Salesman-Problem):

Gegeben sei eine Menge $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ von $n \in \mathbb{N}_+$ Städten und eine Entfernungsmatrix $D = (d_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$, wobei $d_{ij} = d_{ji}$ die Entfernung zwischen den Städten i und j angibt. Eine Rundreise beginnt in einer Stadt, besucht alle anderen Städten genau einmal und kehrt dann wieder zur Ausgangsstadt zurück. Gesucht wird eine kürzeste Rundreise. Das Problem ist bekannt als das Traveling-Salesman-Problem (TSP).

Formuliere ein lineares Programm zum TSP, so dass die ganzzahligen Lösungen dieses linearen Programms genau den Rundreise entspricht.

(Hinweis : Jede Stadt hat innerhalb der Rundreise genau 2 benachbarte Städten; die Rundreise ist zusammenhängend. Die zweite Bedingung ist nicht wirklich schwer in den Griff zu bekommen, wenn man sehr viele Ungleichungen einführt. Unter Umständen empfiehlt sich die Einführung geeigneter Notation.)

(15 Punkte)

Aufgabe 3 (Knapsack-Problem):

Der Firma CASHCOW LTD. stehen $n \in \mathbb{N}_+$ Projekte zur Auswahl. Alle Mitarbeiter sind gleich kompetent, aber aufgrund eines von der Mutterfirma LAZY BUREAUCRATS INTL. verfügten Einstellungsstopps lässt sich die Gesamtzahl nicht über die existierende Zahl A erhöhen. Projekt j $(1 \leq j \leq n)$ benötigt nun genau a_j Mitarbeiter und würde einen Gewinn von c_j abwerfen. Gesucht ist eine Auswahl von Projekten, so dass der erzielte Gesamtgewinn maximiert ist.

Formuliere ein lineares Programm zu diesem Problem, so dass die ganzzahligen Lösungen genau die zulässigen Mengen von Projekten sind. Erkläre, warum das lineare Programm im allgemeinen keine ganzzahlige Lösung hat.

(10 Punkte)

Aufgabe 4 (Ein Matrix-Spiel):

Spieler A und B wählen jeweils eine Zahl a bzw. b aus der Grundmenge $\{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$. Falls

$$\begin{array}{ccccc} a & \leq & b-2 & \rightarrow & \text{A gewinnt} \\ a & = & b-1 & \rightarrow & \text{B gewinnt} \\ a & = & b & \rightarrow & \text{unentschieden} \\ a & = & b+1 & \rightarrow & \text{A gewinnt} \\ a & \geq & b+2 & \rightarrow & \text{B gewinnt} \end{array}$$

Der Gewinner einer Runde erhält vom Verlierer 100 EUR. Beim Unentschieden gibt es keine Auszahlung.

(a) Beschreibe die Gewinnmatrix für den Spieler A.

(b) Formuliere ein lineares Programm, dessen Lösung die Strategie des Spieler B beschreibt, der seinen erwarteten Verlust minimieren will.

(c) Finde eine Strategie für B, die seinen erwarteten Verlust minimiert.

(Hinweis : Welcher Wert muss als erwarteter Verlust für B herauskommen ?)

(5+5+10 Punkte)