

Lineare Optimierung Übung 3 vom 30.10.02

Abgabe der Aufgaben bis 13:00 Uhr am **Freitag, 15.11.02.** durch Einwurf in den Übungskasten im vierten Stock des Forumsgebäudes.

Aufgabe 1 (Dualität und komplementärer Schlupf):

Gegeben sei ein lineares Optimierungsproblem (P) der Form

$$\begin{array}{ll}\max & c^t x \\ Ax & \leq b \\ x & \geq 0\end{array}$$

- (a) Formuliere (P) als äquivalentes Problem der Form $\max c'^t x', A'x' \leq b'$. Leite daraus das zu (P) duale Problem (D) her.
- (b) Formuliere und beweise einen zu Korollar 4 analogen Dualitätssatz für (P) und (D). (Dafür verwendet man die gleiche äquivalente Formulierung wie in (a).)
- (c) Formuliere und beweise einen zu Korollar 8 analogen Satz über komplementären Schlupf für (P) und (D).
- (d) Formuliere das duale Problem zu

$$\begin{array}{llllllllll}\max & 7x_1 & + & 6x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 3x_5 \\ \text{unter} & x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 2x_5 & \leq & 4 \\ & 4x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & + & x_5 & \leq & 3 \\ & 2x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & + & 5x_5 & \leq & 5 \\ & 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & \leq & 1 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & \geq & 0\end{array}$$

- (e) Formuliere die Bedingungen für komplementären Schlupf zum Problem aus (d).
- (f) Verwende den Satz vom komplementären Schlupf um zu überprüfen, ob der Vektor $x_* = (0, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0)$ eine optimale Lösung des Problems aus (d) ist.
(Hinweis: Auch wenn man y nicht kennt, kann man Bedingungen herleiten, die ein y erfüllen muss, und dann konkrete Dinge berechnen.)

(6+6+6+3+4+15 Punkte)

Aufgabe 2 (Allgemeine Dualität):

Ein lineares Optimierungsproblem in seiner allgemeinsten Form enthält eine Mischung aus Ungleichungen und Gleichungen und aus vorzeichenbeschränkten und unbeschränkten Variablen. So ein System wollen wir hier untersuchen.

Gegeben seien dimensionsverträgliche Matrizen A, B, C, D und Vektoren a, b, c, d über \mathbb{R} . Zeige dass

$$\begin{array}{ll} \max & c^t x + d^t y \\ \text{unter} & Ax + By \leq a \\ & Cx + Dy = b \\ & x \geq 0 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ll} \min & u^t a + v^t b \\ \text{unter} & u^t A + v^t C \geq c^t \\ & u^t B + v^t D = d^t \\ & u \geq 0 \end{array}$$

zueinander duale Programme sind.

(20 Punkte)