Prof. Dr. Sándor Fekete

Lineare Optimierung
Übung 2 vom 30.10.02

Abgabe der Aufgaben bis 13:00 Uhr am **Freitag, 08.10.02.** durch Einwurf in den Übungskasten im vierten Stock des Forumsgebäudes.

Aufgabe 1 (Kegel – einmal so, einmal so!):

Betrachte die Menge $X = P(A,0) = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - x_3 \leq 0, x_1 - x_2 - x_3 \leq 0, -x_1 + x_2 - x_3 \leq 0, -x_1 - x_2 - x_3 \leq 0\}$.

(a) Zeige "zu Fuß": $\forall x, y \in X, \forall \mu, \lambda \geq 0 : \mu x + \lambda y \in X$, d.h., X ist ein Kegel.

(b) Nach Definition ist X polyedrisch. Gib eine Menge $S = \{b_1, \ldots, b_m\}$ an, so dass $cone\,(S) = X$ ist.

(c) Sei Y:=$\{a_1, \ldots, a_m\}$ die Menge von Zeilenvektoren der Matrix A und B die aus den Zeilenvektoren $\{b_1, \ldots, b_m\}$ gebildete Matrix. Verifiziere für das genannte Beispiel: Es gilt tatsächlich wie in der Vorlesung bewiesen $P(B,0) = cone(Y)$.

(20 Punkte)

Aufgabe 2 (Kegelbasen):

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Kegel. $S \subseteq X$ heißt Erzeugendensystem für X, falls $cone\,(S) = X$. Ist S minimal (bezüglich Inklusion), dann nennt man S Kegelbasis.

Zeige:

(a) Für den $\mathbb{R}^2$ gibt es Kegelbasen unterschiedlicher Kardinalität.

(b) Eine Menge S ist genau dann Kegelbasis für einen Kegel X, wenn gilt $cone\,(S) = X$ und $\forall s \in S : s \notin cone\,(S \setminus \{s\})$.

(c) Zeige: Im $\mathbb{R}^n$ gibt es Kegel mit Kegelbasen unendlicher Kardinalität.

(Zur Beschreibung gehört auch der Beweis, dass das angegebene Beispiel tatsächlich ein Kegel ist. Um zu zeigen, dass es eine unendliche Kegelbasis gibt, reicht es, eine bestimmte unendliche Menge anzugeben, und zu argumentieren, dass sie den ganzen Kegel erzeugt. Zum Beweis der Inklusionsminimalität verwende man (b) und argumentiere mit einer geeigneten Hyperebene.)

(d) Bereits im $\mathbb{R}^2$ gibt es Kegel, die nicht polyedrisch sind. Besitzt Dein Beispiel eine Basis?

(20 Punkte)

Aufgabe 3 (Lineare Optimierung nur mit Gleichheitsrestriktionen):

Wie wir gesehen haben, gibt es viele gleichwertige Formulierungen für Lineare Optimierungsprobleme – mit und ohne Gleichheitsrestriktionen. In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass Probleme *nur* mit Gleichheitsrestriktionen eher langweilig sind.

(a) Zeige: $\exists x \in \mathbb{K}^n : Ax = b \Longleftrightarrow (\forall u \in \mathbb{K}^m : u^\top A = 0 \Longrightarrow u^\top b = 0)$
(Tip: Das Kriterium für die Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen)

(b) Genau eine der folgenden Alternativen trifft zu für das LP

$$\max_{Ax=b} c^\top x \ .$$

Es ist entweder unzulässig oder zulässig und unbeschränkt oder zulässig und die Zielfunktion ist konstant auf $\{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = b\}$.

(20 Punkte)