Lineare Optimierung
Übung 1 vom 23.10.02

Abgabe der Aufgaben bis 13:00 Uhr am 30.10.02. durch Einwurf in den Übungskasten im vierten Stock des Forumsgebäudes.

$\mathbb{K}$ bezeichnet den Körper der rationalen oder der reellen Zahlen; $\mathbb{K}_+$ die Menge der nicht-negativen Elemente von $\mathbb{K}$.

Aufgabe 1 (Ein lineares Programm):

Löse das folgende lineare Programm graphisch:

$$\max x_1 + x_2$$

unter

$$\begin{array}{rcrcr}
2x_1 & & & \leq & 5 \\
 & - & 2x_2 & \leq & 1 \\
-x_1 & - & x_2 & \leq & -1 \\
2x_1 & + & 10x_2 & \leq & 25 \\
6x_1 & - & 2x_2 & \leq & 13
\end{array}$$

(8 Punkte)

Aufgabe 2 (Äquivalente Polyeder-Definitionen):

Seien A, B, C geeignet dimensionierte Matrizen und b, c, d geeignet dimensionierte Vektoren mit Komponenten aus $\mathbb{K}$.

Zeige, dass die folgenden drei Ungleichungssysteme formal äquivalent sind in dem Sinne, dass jedes von ihnen durch eine geeignete einfache Variablentransformation und eine geeignete Änderung der Matrix A (bzw. B oder C) und des Spaltenvektors b (bzw. c oder d) in jede andere der drei Formen äquivalent umgeformt werden kann:

$$Ax \leq b$$
$$Bx \leq c, \; x \geq 0$$
$$Cx = d, \; x \geq 0$$

Äquivalent soll hier bedeuten, dass man aus einer Lösung des umgeformten Gleichungssystems leicht eine Lösung des ursprünglichen Gleichungssystems erhalten kann; es sind also sechs Umformungen und Folgerungen zu zeigen. Wie?

Aufgabe 3 (Hüllen):

Sei $S \subseteq \mathbb{K}^n$. Definiere die Menge der

- Linearkombinationen $lin(S) = \{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \mid k \in \mathbb{N},\ \lambda_i \in \mathbb{K},\ x_i \in S\}$,
- affinen Kombinationen $aff(S) = \{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \mid k \in \mathbb{N},\ \lambda_i \in \mathbb{K},\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1,\ x_i \in S\}$,
- konischen Kombinationen (oder auch Kegelkombinationen) $cone(S) = \{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \mid k \in \mathbb{N},\ \lambda_i \in \mathbb{K}_+,\ x_i \in S\}$,
- Konvexkombinationen $conv(S) = \{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \mid k \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{K}_+, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, x_i \in S\}$.

von S.

S heißt **Kegel**, wenn $cone(S) = S$.
Eine Teilmenge A des $\mathbb{K}^n$ heißt **affiner Teilraum**, wenn $A = \emptyset$ oder es ein $a \in A$ und einen linearen Teilraum W von $\mathbb{K}^n$ gibt, so dass $A = a + W$.
Zeige:

(a) $aff(S)$ ist der Durchschnitt aller affinen Teilräume von $\mathbb{K}^n$, die S enthalten.

(b) $aff(S) = lin(S) \Longleftrightarrow 0 \in aff(S)$

(c) $\forall x, y \in aff(S) : aff(S) = x + lin(S - y)$

(d) S Kegel $\Longrightarrow lin(S) = \{x - y \mid x, y \in S\}$

(e) S konvex $\Longrightarrow lin(S) = \{\lambda x - \mu y \mid x, y \in S,\ \lambda,\ \mu \in \mathbb{K}_+\}$

(20 Punkte)

Aufgabe 4 (Topologisches):

Seien $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$ eine $n \times m$ –Matrix, $b \in \mathbb{K}^n$ und $P = P(A, b) = \{x \in \mathbb{K}^m \mid Ax \leq b\}$ ein Polyeder. Ferner sei X eine beliebige Teilmenge des $\mathbb{K}^m$. Mit $cl(X)$ sei der Abschluss von X (also die Menge aller Häufungspunkte) bezeichnet.

(a) Zeige: P ist abgeschlossen. (D.h. jeder Häufungspunkt von P gehört zu P.)

(b) Eine lineare Zielfunktion $c^t x$ mit $c \neq 0$ nimmt ihr Minimum nicht auf dem Inneren von P an.

(c) Beweise oder widerlege:
X abgeschlossen (kompakt) $\Longrightarrow conv(X)$ abgeschlossen (kompakt) .

(d) Zeige: X konvex $\Longrightarrow$ $cl(X)$ konvex.

(20 Punkte)