

Abschlussklausur
“Lineare Optimierung”
14.02.2003

Name:

Vorname:

Matr.-Nr.:

Studiengang:

Mit dem Aushang des Klausurergebnisses nur mit der Matrikelnummer am Raum F 524 bin ich einverstanden.

Die Klausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden.

Alle Antworten zu den Aufgaben 1-4 müssen begründet werden, in Aufgabe 5, soweit dies verlangt ist. Dabei dürfen Ergebnisse aus der Vorlesung und von den Übungsblättern (mit genauer Quellenangabe) benutzt werden.

Alle Blätter sind mit *Namen* zu versehen. Abzugeben sind die Lösungen in *Reinschrift* mit allen *Nebenrechnungen* auf diesen Aufgabenblättern, sowie diesem Blatt als Deckblatt. (Bei Bedarf Zusatzblätter einfügen!) Mit *Bleistift* oder *in rot* geschriebene Klausurteile können nicht gewertet werden.

Die Bearbeitungszeit für die Klausur ist 180 Minuten.

Erlaubte Hilfsmittel sind schriftliche Unterlagen wie Skripten, Übungsblätter und Musterlösungen, persönliche Aufzeichnungen. Nicht erlaubt sind Bücher und Taschenrechner aller Art.

Aufgabe	Bearbeitet	Punkte	von
1			20
2			10
3			10
4			20
5			20
Summe			80

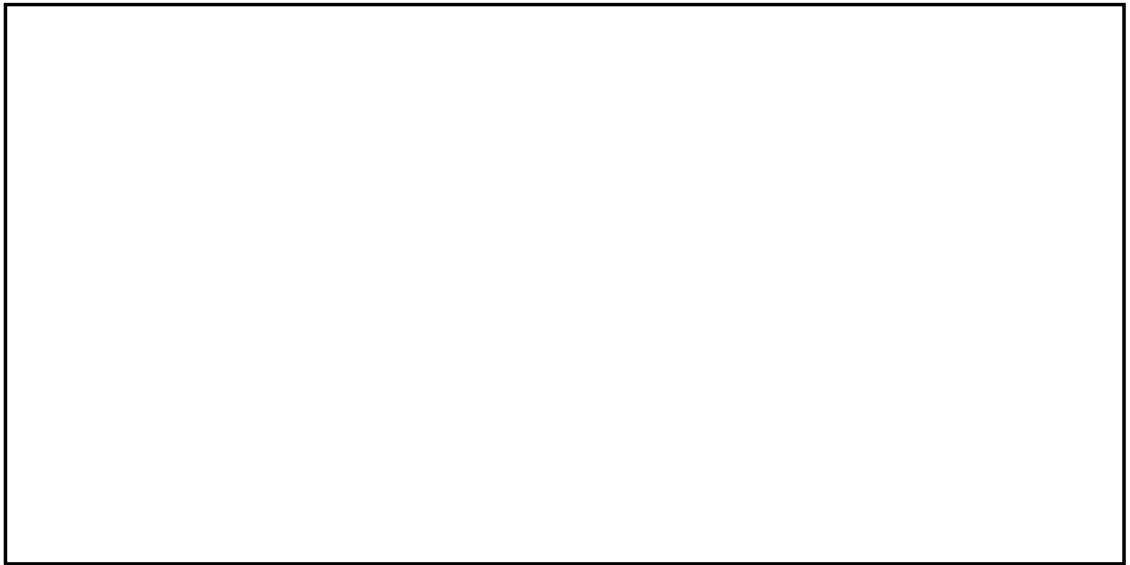
1. Aufgabe:**10+10 Punkte**

Gegeben sei folgendes lineare Programm (P):

$$\begin{array}{llllll} \min & 110x_1 & + & 51x_2 & + & 180x_3 \\ \text{unter} & x_1 & + & & & 3x_3 \geq 2 \\ & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 \geq 3 \\ & & & & & x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 3. \end{array}$$

- (a) Formuliere das duale Problem (D) zu (P). Löse (D) mit der Simplexmethode. Benutze dabei folgende Pivotregel: als Pivotspalte wird jeweils die mit dem größten positiven Kostenkoeffizienten gewählt.

Das Schlusstableau bitte in die Box am Ende der nächsten Seite schreiben; bei Bedarf weitere Nebenrechnungen auf ein Extrablatt hinter dieser Seite einfügen!



(b) Löse (P) mit dem Satz vom komplementären Schlupf.

Die Optimallösung bitte in die Box am Ende der Seite schreiben.

A large, empty rectangular box with a thin black border, intended for the user to write the optimal solution to the problem.

2. Aufgabe:

5+5 Punkte

(a) Betrachte die Menge $P(A, b) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$.

Zeige: $P(A, b)$ ist konvex, d.h. mit $x^1, \dots, x^k \in P(A, b)$ ist für $y = \sum_{i=1}^k \lambda_i x^i$ mit $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0$ auch $y \in P(A, b)$.

(b) Zeige mit Hilfe einer Variante von (a): Der in Abbildung 1 gezeigte fraktionale Vektor y gehört zum Matching-Polytop, d.h., er erfüllt

$$\sum_{e \in \delta(v)} x_e = 1 \quad \text{für } v \in V$$

$$\sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 1 \quad \text{für } S \subset V, S \neq \emptyset, |S| \text{ ungerade}$$

$$x \geq 0.$$

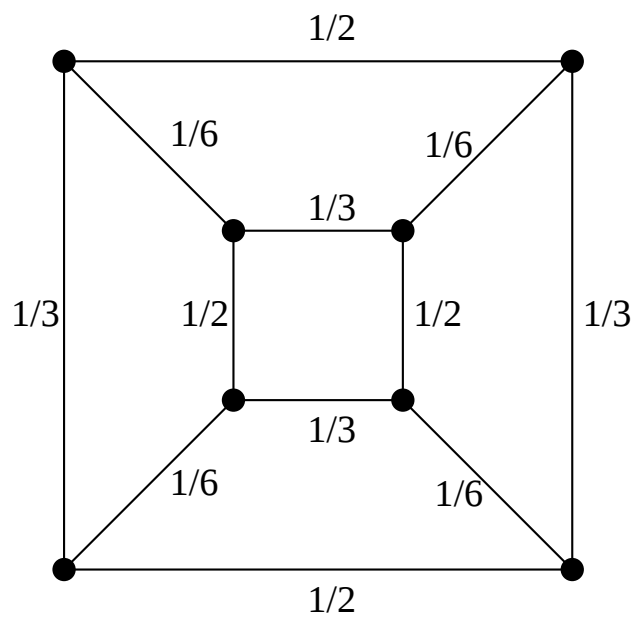


Abbildung 1: Ein Vektor y

3. Aufgabe:**10 Punkte**

Sei $A = A^T$. Zeige, dass jede zulässige Lösung von $\min c^T x$ unter $Ax = c$ optimal ist.

4. Aufgabe:

5+15 Punkte

Betrachte das ganzzahlige Programm

$$\begin{array}{ll} \max & x_2 \\ \text{unter} & -3x_1 + 4x_2 \leq 4 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 11 \\ & 2x_1 - x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}. \end{array}$$

Zeichne ein Bild, um die erste Frage zu beantworten:

- (a) Was ist der Optimalwert der linearen Relaxierung? Was ist der Optimalwert des ganzzahligen Problems ? Was ist die konvexe Hülle aller zulässigen Lösungen des ganzzahligen Problems ?

(b) Hier das optimale Simplextableau zur LP-Relaxierung:

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
x_1	1	0	$-1/9$	$2/9$	0	2
x_2	0	1	$1/6$	$1/6$	0	$5/2$
s_3	0	0	$7/18$	$-5/18$	1	$7/2$
	0	0	$-1/6$	$-1/6$	0	$-5/2$

(Dabei bezeichnet s_i die Schlupfvariable zur i -ten Ungleichung.) Gib eine Gomory-Schnittebene an, wobei die erste Zeile des Tableaus verwendet werden soll, für die sich ein sinnvoller Schnitt ergibt. Stelle den Schnitt graphisch dar.

Füge die neue Restriktion zum oben angegebenen LP hinzu und löse das neue lineare Programm mit der dualen Simplexmethode. (Benutze dabei folgende Pivotregel: kommen zwei verschiedene Spalten zum Pivotisieren in Frage, dann wird die erste von links gewählt.) Finde auf dieser Weise den Optimalwert des ganzzahligen Problems mit insgesamt zwei Gomory-Schnittebenen. (Dabei reicht es im zweiten Schritt zu begründen, dass die ursprünglichen Variablen x_1 und x_2 das ganzzahlige Optimum annehmen; der Rest des Tableaus auf den verschiedenen Schlupfvariablen braucht man dafür nicht mehr auszurechnen.)

Die entscheidenden Teile Schlusstableau bitte in die Box am Ende der nächsten Seite schreiben; bei Bedarf weitere Nebenrechnungen auf ein Extrablatt hinter dieser Seite einfügen!



5. Aufgabe:

20 Punkte

- (a) Gib zwei Gründe an, warum die Simplexmethode besser ist als gnadenloses Ausprobieren aller Basislösungen.
- (b) Welche Bedeutung hat das Farkas-Lemma für die Komplexität von “Linearer Optimierung”?
- (c) Zu welcher Komplexitätsklasse gehört “Lineare Optimierung”? Gib zwei Algorithmientypen an, die dies belegen!
- (d) Was weiß man über die Laufzeit der Simplexmethode für die meisten Pivotauswahlregeln? Wie nennt man die Beispiele, die das belegen?

- (e) Sei (P) ein lineares Optimierungsproblem mit endlicher Optimallösung. Was weiss man dann über Zulässigkeit und Optimalwert des dualen Problems (D) und warum (Stichwort genügt)?
- (f) Stimmt es, dass in einem Paar zueinander dualer LPs wenigstens eines eine zulässige Lösung besitzt? (Gib eine kurze Begründung Deiner Antwort!)
- (g) Dem neuen Vorstandsvorsitzenden der Deutsche Bahn AG hat ein Unternehmensberater erzählt, dass es effiziente Algorithmen zum Lösen von LPs gibt, mit denen sich schneller neue Fahrpläne berechnen ließen. Deshalb will er, dass Du eine Task Force leitest, die das mit der Ellipsoidmethode angehen soll. Nenne einen Vorteil und einen Nachteil dieser Methode und sprich eine Empfehlung für die weitere Vorgehensweise aus!

(h) Welche Bedeutung haben die Ungleichungen $\sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 2$ für $S \subset V, S \neq \emptyset$ in dem in der Vorlesung vorgestellten LP für TSP?

(i) Was beschreibt das LP

$$\begin{aligned} \min \quad & w^t x \\ \sum_{e \in \delta(v)} x_e &= 1 \quad \text{für } v \in V \\ \sum_{e \in \delta(S)} x_e &\geq 1 \quad \text{für } S \subset V, S \neq \emptyset, |S| \text{ ungerade} \\ x &\geq 0? \end{aligned}$$

Für welche Graphen ist dieses LP zulässig? Gib eine möglichst große Klasse von Graphen $G = (V, E)$ an, für die das LP eine ganzzahlige Lösung hat.

(j) Erkläre mit eigenen Worten, was ein NP-vollständiges Problem ist.