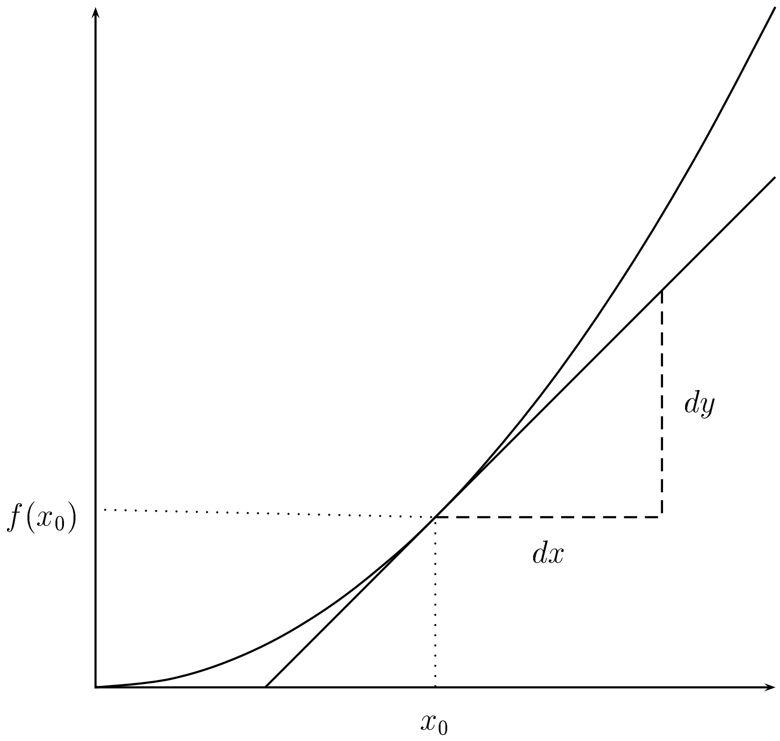
Institut für Algebra und Zahlentheorie
Technische Universität Braunschweig

Mathematischer Vorkurs



Satz: Dr. H. Weiß, Institut für Algebra und Zahlentheorie
Dr. W. Oelke, Institut für Algebra und Zahlentheorie
M. Harborth

2. vermehrte und verbesserte Auflage, Braunschweig, Oktober 1995

Inhaltsverzeichnis

1 Terminologisches

1.1 Aussagen

Um bei der Formulierung mathematischer Sachverhalte Ungenauigkeiten zu vermeiden, muß man die Sprache präzisieren. Will man etwa zum Ausdruck bringen, daß es genau eine gerade Primzahl gibt und nicht mehrere, so wird dieses nicht durch den Satz: „Es gibt eine gerade Primzahl“ beschrieben, denn so wird offengelassen, ob es eine einzige oder mehr als eine gibt. Man sagt deshalb: „Es gibt *genau* eine gerade Primzahl“. Der Gebrauch des Wortes *genau* hat in der Mathematik diese feste Bedeutung.

Zum Verständnis mathematischer Texte ist es unumgänglich, die üblichen Redeweisen zu kennen. Sie beseitigen die Ungenauigkeiten der deutschen Sprache.

Eine *Aussage* ist ein Satz, von dem es sinnvoll ist, zu fragen, ob er wahr oder falsch ist.

Mit Hilfe der Bindewörter *nicht, und, oder, wenn ... so* und *genau dann ... wenn*, kann man Aussagen verknüpfen und so neue Aussagen erhalten:

Aussage	**Bezeichnung**	**Schreibweise**
nicht A	Negation	$\neg A$
A oder B	Alternative	$A \vee B$
A und B	Konjunktion	$A \wedge B$
wenn A, dann B	Implikation	$A \Longrightarrow B$
A genau dann, wenn B	Äquivalenz	$A \Longleftrightarrow B$

Für die Aussage $A \Longrightarrow B$ sind noch folgende Sprechweisen üblich: *aus A folgt B*, *A ist hinreichend für B* und *B ist notwendig für A*. Wir nennen A die Voraussetzung, B die Behauptung der Implikation $A \Longrightarrow B$. $A \Longrightarrow B$ besagt lediglich, daß jedesmal wenn A wahr ist, auch B wahr ist. Insbesondere wird in dem Fall, in dem A falsch ist, überhaupt nichts ausgesagt, weil man aus etwas Falschem alles folgern kann. Die für $A \Longleftrightarrow B$ üblichen Sprechweisen sind: *A genau dann, wenn B*; *B ist notwendig und hinreichend für A*, *B ist gleichwertig (äquivalent) mit A* und *B gilt dann und nur dann, wenn A gilt.*

1.2 Mengen

Die in der Mathematik betrachteten Gegenstände werden durch Symbole, meist durch Buchstaben, bezeichnet. Dabei kennzeichnen manche Symbole feste Dinge, zum Beispiel π das Verhältnis zwischen Kreisumfang und Durchmesser. Andere Symbole sind *Veränderliche* (=*Variable*), d.h. sie können jeden Gegenstand einer Klasse von Gegenständen bezeichnen.

In der Mathematik wird jede Zusammenfassung von wohlunterschiedenen Objekten zu einer Gesamtheit eine *Menge* genannt. Eine Menge ist definiert, wenn feststeht, welche Objekte zu dieser Menge gehören und welche nicht. Die zur Menge gehörenden Objekte heißen ihre Elemente.

Es gibt zwei Möglichkeiten, Mengen zu definieren:

- Durch Aufzählen ihrer Elemente, die (in beliebiger Reihenfolge zwischen geschweifte Klammern (Mengenklammern)) gesetzt sind und durch Kommata getrennt werden.

- Durch Angabe einer die Elemente charakterisierenden Eigenschaft.

Beispiele:

$$\begin{aligned}
\mathbb{N} &:= \{1, 2, 3, 4, \ldots\} \text{ natürliche Zahlen} \\
\mathbb{Z} &:= \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\} \text{ ganze Zahlen} \\
\mathbb{Q} &:= \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; 0 \neq q, p \in \mathbb{Z} \right\} \text{ rationale Zahlen}
\end{aligned}$$

$$\{x \mid x \text{ ist gerade Primzahl}\} = \{2\}$$

Sprechweise: Die Menge aller x mit der Eigenschaft: x ist gerade Primzahl.

$$\{+1, -1\} = \left\{x \mid x^2 - 1 = 0\right\}$$

Die Menge aller x mit der Eigenschaft: x ist Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 - 1 = 0$.

Gehört ein Objekt a einer Menge M an, so schreibt man $a \in M$ (gelesen: a ist Element vom M). Gehört a nicht zu M, so schreibt man: $a \notin M$. Wenn jedes Element einer Menge A auch Element einer Menge B ist, nennt man A Teilmenge von B und schreibt: $A \subseteq B$, man sagt auch: A ist in B enthalten. Nach dieser Definition ist offenbar jede Menge Teilmenge von sich selbst.

Zu je zwei Mengen A und B kann man die folgenden zwei Mengen bilden[1]

$$\begin{aligned}
A \cap B &:= \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\} \\
A \cup B &:= \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}
\end{aligned}$$

$A \cap B$ heißt der *Durchschnitt* von A und B, $A \cup B$ heißt *Vereinigung* von A und B.

Beispiele:

1. $1 \in \mathbb{Z}$, $\pi \notin \mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ oder kurz: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$.

2. $\{x \mid x < 12 \text{ und } x \text{ ist Primzahl}\} \cap \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} = \{2, 3, 5, 7\}$.

3. $\{3, 9, 27\} \cup \{9, 12, 15\} = \{3, 9, 12, 15, 27\}$

4. $\mathbb{R} \cap \emptyset = \emptyset$.

[1] Es ist zweckmäßig und für die Definition des Schnittes zweier Mengen notwendig, eine Menge zu definieren, die kein Element enthält, die sog. *leere Menge*: $\emptyset$. Als charakterisierende Eigenschaft kann man jede verwenden, die niemals erfüllbar ist, z.B. $\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$

1.3 Kartesische Produkte

Zu je zwei Mengen A und B kann man die Menge der geordneten Paare von Elementen aus A und B bilden:

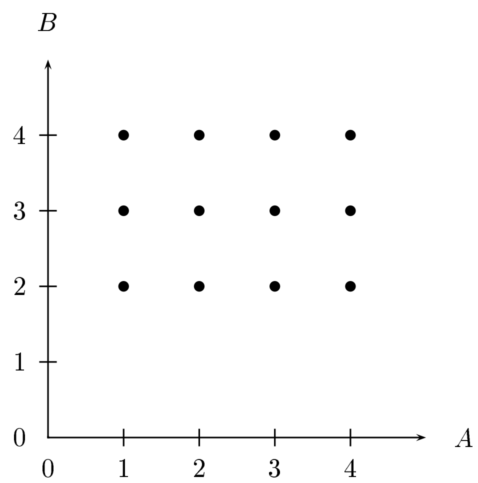
$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

In jedem geordneten Paar $(a, b) \in A \times B$ steht an erster Stelle ein Element aus A, an zweiter Stelle ein Element aus B. ($A = B$ ist nicht verboten!). $A \times B$ heißt das kartesische Produkt von A und B (gelesen: A kreuz B).

Beispiele:

1.) $A := \{0, 1\}$, $B := \{0, 2\} \implies A \times B = \{(0, 0), (0, 2), (1, 0), (1, 2)\}$

2.) Wählt man für A bzw. B Teilmengen von $\mathbb{Z}$, die aus aufeinanderfolgenden Zahlen bestehen, so kann man endliche Punktgitter beschreiben. Mit $A := \{1, 2, 3, 4\}$ und $B := \{2, 3, 4\}$ ergibt $A \times B$ das Punktgitter:



Anmerkung:
Sind $A_1, A_2, \ldots, A_n$ Mengen, so definiert man analog das n-fache kartesische Produkt

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1,\ a_2 \in A_2,\ \ldots, a_n \in A_n\}.$$

Ist speziell $A_1 = \cdots = A_n = A$, so schreibt man auch abkürzend

$$A^n := A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n.$$

Der wichtigste Spezialfall ist $A = \mathbb{R}$ und $n = 2$ oder $n = 3$.

2 Zahlen

2.1 Rechnen mit Ungleichungen und Beträgen

Die reellen Zahlen sind linear geordnet. Für $a, b \in \mathbb{R}$ heißt $a \leq b$ eine Ungleichung. Ist $a \leq b$ und $a \neq b$, so schreibt man $a < b$ und sagt, daß a (echt) kleiner ist als b. Ist $0 < a$, so heißt a *positiv*, ist $a < 0$, so heißt a *negativ*. Für $a \in \mathbb{R}$ ist

$$|a| := \begin{cases} -a & \text{falls } a < 0 \\ a & \text{falls } a \geq 0 \end{cases}$$

der *Absolutbetrag* von a. Ist a größer oder gleich 0, so ist $|a| = a$, sonst ist $|a|$ gleich $-a$.

Es gelten die folgenden Regeln:

1. Transportregel
   $a + b \leq c \quad \Longleftrightarrow \quad a \leq c - b$

2. (a) $a \leq b$ und $0 \leq c \quad \Longrightarrow \quad ac \leq bc$
   (b) $a \leq b$ und $c \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad ac \geq bc.$
   Man beachte: Bei Multiplikation mit einer negativen Zahl kehrt sich das Ungleichheitszeichen um.

3. Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt $a^2 \geq 0$

4. Addition von Ungleichungen

$$a \leq b \text{ und } c \leq d \quad \Longrightarrow \quad a + c \leq b + d$$

5. $a^2 \leq b^2 \iff |a| \leq |b|$

6. Bernoullische Ungleichung
   Für $x \geq -1$ gilt

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Beispiele:

1.) $|-5| = 5, \ |100| = 100, \ x + 1 < 5x - 3 \iff -4x < -4 \iff 4x > 4 \iff x > 1.$

2.) Man schreibe in $K = \{ x \in \mathbb{R} \mid |x - 3| \leq 2\}$ die definierende Eigenschaft $|x - 3| \leq 2$ ohne Betragstriche.
Entsprechend der Definition des Betrages müssen wir zwei Fälle unterscheiden. Ist $x - 3 < 0$, also $x < 3$, so muß zur Auflösung der Betragstriche die linke Seite mit -1 multipliziert werden:

$$-(x - 3) \leq 2 \iff x - 3 \geq -2 \iff x \geq 1.$$

Diese Rechnung ist nur für $x < 3$ richtig, also ergibt sich in diesem Fall: $1 \leq x < 3$. Für $x \geq 3$ ist $x - 3$ positiv und die Betragstriche werden einfach weggelassen:

$$|x-3| \leq 2 \iff x-3 \leq 2 \iff x \leq 5,$$

im zweiten Fall also: $3 \leq x \leq 5$. Beide Fälle zusammen ergeben das Intervall $1 \leq x \leq 5$.
Lösung: $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 5\}$.

Die Menge $\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x-m| \leq r\}$ beschreibt für $n = 2$ einen Kreis und für $n = 3$ eine Kugel jeweils mit dem Mittelpunkt m und dem Radius r.

2.2 Bruchrechnen

In diesem Kapitel soll das Rechnen mit Zahlen

$$r \in \mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; 0 \neq q, p \in \mathbb{Z} \right\},$$

sogenannten rationalen Zahlen wiederholt werden. p heißt Zähler, und q heißt Nenner. Die Zahl 0 darf nicht als Nenner auftreten.

Die Darstellung einer rationalen Zahl als Quotient zweier ganzer Zahlen ist nicht eindeutig, d.h. es gibt mehrere (sogar unendlich viele) Möglichkeiten, dieselbe Zahl als Bruch zu schreiben.

$$\frac{2}{7} = \frac{-84}{-294} = \frac{4032}{14112} = \cdots$$

Will man unter mehreren Brüchen diejenigen herausfinden, die dieselbe rationale Zahl darstellen, so bedarf es der Technik des Kürzens. Ist der größte gemeinsame Teiler (ggT) von Zähler und Nenner bekannt, dann erhält man einen Bruch mit kleinstmöglichen Zähler und Nenner, wenn man durch den ggT dividiert. Der größte gemeinsame Teiler $\mathrm{ggT}(a_1, a_2, ..., a_n)$ $(a_i \in \mathbb{Z})$ ist das Produkt aus den größten in a_1 und a_2 und ... und a_n auftretenden Primzahlpotenzen.
Beispiel:

$$\begin{aligned} 84 &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \\ 360 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5\,. \end{aligned}$$

Die größten Primzahlpotenzen, die in beiden Zerlegungen vorkommen sind 2^2 und 3^1. Damit gilt $\mathrm{ggT}(84{,}360) = 4 \cdot 3 = 12$ und $\frac{84}{360} = \frac{7 \cdot 12}{30 \cdot 12} = \frac{7}{30}$.

Beim Kürzen wird ein großer Teil der Arbeit im Kopf geleistet. Dabei werden nur die Ergebnisse schriftlich festgehalten. Zweckmäßig ist bei der Ausführung die Kenntnis der wichtigsten Teilbarkeitsregeln, die einfache Gesetzmäßigkeiten der dezimalen Schreibweise benutzen:

Teilbarkeitsregeln:
Eine Zahl ist teilbar durch

(a) 2, wenn die letzte Ziffer durch 2 teilbar ist

(b) 4, wenn die letzten beiden Ziffern durch 4 teilbar sind

(c) 8, wenn die letzten drei Ziffern durch 8 teilbar sind

(d) 5, wenn die letzte Ziffer durch 5 teilbar ist

(e) 3, wenn die Quersumme durch 3 teilbar ist

(f) 6, wenn die Quersumme durch 3 und die letzte Ziffer durch 2 teilbar ist

(g) 9, wenn die Quersumme durch 9 teilbar ist

(h) 11, wenn die alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist.
Beispiel: Die alternierende Quersumme von 418 ist $+4 - 1 + 8 = 11$, also ist 418 durch 11 teilbar.

(i) 7, (es ist keine Regel vorhanden, ausprobieren!)

Beispiel:

$$\frac{601832}{396088} = \frac{150458}{99022} = \frac{75229}{49511} = \frac{6839}{4501} = \frac{977}{643}.$$

Nacheinander sind die Regeln (b), (a), (h) angewendet worden. Durch Probieren findet man, daß 6839 und 4501 durch 7 teilbar sind. Weiteres Kürzen ist nicht möglich; denn 643 ist eine Primzahl.
Eine weitere Hilfe beim Kürzen ist die folgende Regel: Ist $a \in \mathbb{Z}$ teilbar durch m und durch n und gilt $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$, so ist a auch teilbar durch $m \cdot n$.
Beispiel: 204 ist teilbar durch 3 und durch 4. Daher ist wegen ggT(3,4) = 1 die Zahl 204 auch durch 12 teilbar.

2.3 Größenvergleich von rationalen Zahlen

In zwei Fällen ist der Größenvergleich besonders einfach:

1. Fall: Die Brüche haben denselben Nenner $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\frac{a}{m} \leq \frac{b}{m} \iff a \leq b.$$

2. Fall: Die Brüche haben denselben Zähler $m \in \mathbb{N}$.

(a) Haben a und b gleiches Vorzeichen, so gilt

$$\frac{m}{a} \geq \frac{m}{b} \iff a \leq b.$$

(b) Haben a und b verschiedene Vorzeichen, so gilt

$$\frac{m}{a} \geq \frac{m}{b} \iff a > 0 \text{ und } b < 0.$$

Den allgemeinen Fall führt man auf einen dieser beiden Fälle zurück, indem man mit Hilfe des kleinsten gemeinsamen Vielfachen (kgV) entweder den Nenner oder den Zähler gleichnamig macht. Das kleinste gemeinsame Vielfache $\text{kgV}(a_1, a_2, ..., a_n)$ der Zahlen $a_1, ..., a_n \in \mathbb{Z}$ ist das Produkt aus den größten in a_1 oder a_2 oder ... oder a_n auftretenden Primzahlpotenzen.

Beispiel:
Man vergleiche $\frac{17}{40}$, $\frac{15}{36}$, $\frac{52}{126}$ bezüglich $\leq$.

$$\begin{aligned} 40 &= 2^3 \cdot 5 \\ 36 &= 2^2 \cdot 3^2 \\ 126 &= 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \end{aligned}$$

Die größten Primzahlpotenzen, die in der ersten oder der zweiten oder der dritten Zerlegung vorkommen, sind 2^3, 3^2, 5^1 und 7^1. Damit gilt $\text{kgV}(40{,}36{,}126) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 5 = 2520$.

$$\frac{17}{40} = \frac{17 \cdot 63}{40 \cdot 63} = \frac{1071}{2520}; \quad \frac{52}{126} = \frac{52 \cdot 20}{126 \cdot 20} = \frac{1040}{2520}; \quad \frac{15}{36} = \frac{15 \cdot 70}{36 \cdot 70} = \frac{1050}{2520}.$$

Damit gilt $\frac{52}{126} < \frac{15}{36} < \frac{17}{40}$.

2.4 Grundrechenarten

Zum Schluß dieses Abschnittes sollen noch die Regeln für das Rechnen mit rationalen Zahlen aufgeschrieben werden ($a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, Nenner $\neq 0$):

$$\begin{aligned} \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} &= \frac{a \pm b}{c} & \qquad \frac{a}{c} \pm \frac{b}{d} &= \frac{a \cdot d \pm b \cdot c}{c \cdot d} \\ \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} &= \frac{a \cdot b}{c \cdot d} & \qquad \frac{a}{c} : \frac{b}{d} &= \frac{a \cdot d}{c \cdot b} \end{aligned}$$

Man beachte die Schreibweise für gemischte Brüche: $5\frac{3}{7}$ ist eine abgekürzte Schreibweise für $5 + \frac{3}{7}$. Man bezeichnet diese Darstellung einer Zahl als gemischten Bruch. Dagegen bedeutet $5 \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{7} = 2 + \frac{1}{7} = 2\frac{1}{7}$.

2.5 Rechnen im Dezimalsystem

Bei den Dezimalzahlen kommen den Ziffern innerhalb eines Zahlzeichens außer dem Zahlwert auch Stellenwerte zu. Beispiel:

$$6715.43 = 6 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 5 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2}.$$

Um einen Bezugspunkt auszuzeichnen, wird zwischen Einern und Zehnern ein Trennzeichen gesetzt, im deutschen Sprachraum meist ein Komma, im angloamerikanischen

Sprachraum ein Punkt.
Wir verwenden einen Punkt, um Mißverständnisse auszuschließen. Bei der Verwendung eines Kommas ist z.B. nicht klar, ob bei der Schreibweise $(3,4,5)$ der Punkt mit den Koordinaten 3, 4 und 5, der Punkt mit den Koordinaten 3.4 und 5 oder der Punkt mit den Koordinaten 3 und 4.5 gemeint ist.

2.5.1 Umschreiben von Brüchen in Dezimalzahlen

Besonders einfach ist das Umschreiben, wenn der Nenner des Bruches eine Potenz von 10 ist: $\frac{47}{100} = \frac{40}{100} + \frac{7}{100} = \frac{4}{10} + \frac{7}{100} = 0.47$. Bei Brüchen, deren Nenner nur die Primfaktoren 5 und 2 enthalten, kann man durch Erweitern immer eine Zehnerpotenz als Nenner erhalten: $\frac{17}{40} = \frac{17 \cdot 25}{1000} = \frac{425}{1000} = 0.425$.

Eine Umformung eines (gekürzten) Bruches $\frac{p}{q}$, dessen Nenner außer 2 und 5 noch andere Primfaktoren enthält, ergibt immer eine nichtabbrechende, periodische Dezimalzahl. Seine Periode hat höchstens $q-1$ Ziffern.

2.5.2 Umschreiben von Dezimalzahlen in Brüche

Einfach ist dieses Umschreiben bei abbrechenden Dezimalzahlen: $0.535 = \frac{535}{1000}$. Sonst unterscheidet man zwei Fälle:

Reinperiodische Dezimalzahlen

Solche Zahlen enthalten eine Periode, die unmittelbar hinter dem Komma beginnt. Ist n die Periodenlänge, so wählt man die Ziffern der Periode als Zähler und als Nenner $10^n - 1$.

Beispiel: $\frac{p}{q} = 0.\overline{457} = \frac{457}{999}$. Die ausführliche Rechnung sieht so aus:

$$\begin{array}{rrcll} & \frac{p}{q} & = & 0.\overline{457} & \\ \Longleftrightarrow & 1000 \cdot \frac{p}{q} & = & 457.\overline{457} & \Big| \; -\frac{p}{q} \;\; (= 0.\overline{457}) \\ \Longleftrightarrow & 999 \cdot \frac{p}{q} & = & 457 & \\ \Longleftrightarrow & \frac{p}{q} & = & \frac{457}{999} & \end{array}$$

Gemischt periodische Dezimalzahlen

Bei gemischt periodischen Brüchen beginnt die Periode frühestens an der zweiten Stelle hinter dem Komma. Die Umwandlungsmethode läßt sich gut an einem Beispiel erläutern:

$$\begin{aligned}
& \frac{p}{q} &=& \; 0.3\overline{72} & \\
\iff & 100 \cdot \frac{p}{q} &=& \; 37.2\overline{72} & \Big| -\frac{p}{q} \\
\iff & 99 \cdot \frac{p}{q} &=& \; 36.900 & \\
\iff & \frac{p}{q} &=& \; \frac{36.9}{99} = \frac{369}{990} = \frac{41}{110} &
\end{aligned}$$

Nichtperiodische, nichtabbrechende Dezimalzahlen

Nichtperiodische, nichtabbrechende Dezimalzahlen lassen sich nicht in einen Bruch umwandeln, es handelt sich um irrationale Zahlen, z. B. $\pi = 3.14159\ldots$

2.6 Übergang zu anderen Ziffernsystemen

Im Dezimalsystem stehen zum Benennen von (An-)Zahlen die zehn Ziffern $0, 1, \ldots, 9$ zur Verfügung. Die Schreibweise 10 signalisiert, daß die ersten zehn Ziffern verbraucht sind. Kann man $n \in \mathbb{N}$ Ziffern zum Benennen einsetzen, so ist 10 die Schreibweise für n, und wir haben es mit einem n-er System zu tun. Die Umrechnung vom Dezimal- in das n-er System und umgekehrt wird mit Hilfe einer Entwicklung nach Potenzen von n vorgenommen und zur Unterscheidung n als Index an die Ziffernfolge angehängt. $34_{10} = 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$. Allgemein:

$$(z_1 z_2 \cdots z_k)_n = z_1 \cdot n^{k-1} + z_2 \cdot n^{k-2} + \cdots + z_k \cdot n^0\,, \quad 0 \leq z_i < n, \;\; i = 1, \ldots, k.$$

Die Forderung $0 \leq z_i < n$ macht die Darstellung eindeutig.

Beispiele: $1993_{10} = 3711_8 = 11111001001_2$.

Mit $\mathrm{A}_{16} = 10_{10}$, $\mathrm{B}_{16} = 11_{10}$, $\mathrm{C}_{16} = 12_{10}$, $\mathrm{D}_{16} = 13_{10}$, $\mathrm{E}_{16} = 14_{10}$, $\mathrm{F}_{16} = 15_{10}$ bezeichnet man die 6 fehlenden Ziffern, um Zahlen bezüglich der Basis 16 darzustellen. Es gilt: $1993_{10} = 7\mathrm{C}9_{16} \quad \left(= 7 \cdot 16^2 + 12 \cdot 16^1 + 9 \cdot 16^0\right)$.

Die Zahlsysteme zur Basis 2, 8 und 16 heißen Dual-, Oktal- und Hexadezimalsystem. Sie verdienen besondere Beachtung, weil sie bei Rechnerarchitekturen eine wichtige Rolle spielen. Aus diesem Grund besitzen einfache Taschenrechner Funktionstasten für Umrechnungsroutinen.

2.7 Potenzen und Wurzeln

Die einfachste Operation innerhalb von Zahlen ist die Addition. Addiert man gleiche Zahlen zueinander, so kann man dieses durch eine Multiplikation abkürzen:

$$a + a + a + a = 4 \cdot a.$$

Eine Stufe höher gelangt man, wenn man ein mehrfaches Produkt durch einen hochgestellten Index abkürzt: $a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4$. Allgemein ergeben sich aus der Abkürzung

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}}, \qquad n \in \mathbb{N}, \quad a \in \mathbb{R},$$

dem Kommutativgesetz und dem Assoziativgesetz der Multiplikation die Potenzrechenregeln. a heißt Basis, und n heißt Exponent der Potenz a^n. Wegen $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ ist es sinnvoll, $a^0 := 1$ zu setzen. Mit $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$ erweitert man für $a \neq 0$ die Menge der Exponenten auf $\mathbb{Z}$. Insgesamt ergeben sich die folgenden Rechenregeln für $n, m \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} (a \cdot b)^n &= a^n \cdot b^n \\ \left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{a^n}{b^n} \qquad , b \neq 0 \\ a^m \cdot a^n &= a^{m+n} \\ \frac{a^m}{a^n} &= a^{m-n} \\ (a^m)^n &= a^{m \cdot n} \end{aligned} \tag{1}$$

Beispiele:

1.) $0^n = 0,\ n \in \mathbb{N};\quad 1^n = 1,\ n \in \mathbb{Z};\quad a^n : a^{-n} = a^n \cdot a^n = a^{2n}$.

2.) $\dfrac{(9xy^3)^3}{(12x^2y)^4} \cdot \dfrac{(8x^4y)^5}{(6x^5y^3)^3} = \dfrac{9^3x^3y^9 \cdot 8^5x^{20}y^5}{12^4x^8y^4 \cdot 6^3x^{15}y^9} = \dfrac{3^6 2^{15} x^{23} y^{14}}{2^8 3^4 2^3 3^3 x^{23} y^{13}} = \dfrac{2^4}{3}y = \dfrac{16}{3}y.$

Die Auflösungen der Gleichungen $4 + x = 7$ bzw. $5 \cdot x = 15$ führen von der Addition bzw. Multiplikation zu den Umkehrungen Subtraktion bzw. Division. Will man $x^3 = 64$ nach x auflösen, so benötigt man eine Erweiterung der Potenzrechengesetze auf rationale Exponenten: Mit $x = x^{3 \cdot \frac{1}{3}} = (x^3)^{\frac{1}{3}}$ folgt dann $(64)^{\frac{1}{3}} = (4^3)^{\frac{1}{3}} = 4$. Man schreibt $\sqrt[n]{a} := a^{\frac{1}{n}}$ und hat zu bedenken, daß diese Umkehrung weder immer eindeutig noch immer möglich ist. Im Falle $x^2 = -4$ ist sie nicht möglich, im Fall $x^2 = 4 = (\pm 2)^2$ nicht eindeutig. Die sich hier zeigende Unvollkommenheit bei der Lösung von Gleichungen führte zur Einführung der Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Für $x \in \mathbb{C}$ gibt es eine geschlossene Darstellungtheorie der Lösungen von algebraischen Gleichungen.

Zur zweiten Erweiterung des Potenzbegriffs kommt man durch die Definition

$$a^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{a^m} \qquad \text{für} \quad 0 \leq a \in \mathbb{R}.$$

Für diese Definition läßt sich die Gültigkeit der Potenzgesetze (1) beweisen. Damit ist die Erweiterung sinnvoll, und jede Aufgabe der Wurzelrechnung läßt sich mit Hilfe der Potenzgesetze lösen.

Beispiele:

1.) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{14} \cdot \sqrt{22} \cdot \sqrt{11} = 7^{\frac{1}{2}} \cdot 14^{\frac{1}{2}} \cdot 22^{\frac{1}{2}} \cdot 11^{\frac{1}{2}} = (7 \cdot 14 \cdot 22 \cdot 11)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{23716} = 154$

2.) $(\sqrt[5]{16}-2\sqrt[5]{8})(2\sqrt[5]{2}-3\sqrt[5]{4}) = 2\cdot 32^{\frac{1}{5}} - 3\cdot 64^{\frac{1}{5}} - 4\cdot 16^{\frac{1}{5}} + 6\cdot 32^{\frac{1}{5}}$
$= 2\cdot (2^5)^{\frac{1}{5}} - 3\cdot (2\cdot 32)^{\frac{1}{5}} - 4\cdot 16^{\frac{1}{5}} + 6\cdot (2^5)^{\frac{1}{5}}$
$= 2\cdot 2 - 3\cdot 2^{\frac{1}{5}}\cdot 2 - 4\cdot 16^{\frac{1}{5}} + 6\cdot 2 = 16 - 6\sqrt[5]{2} - 4\sqrt[5]{16}.$

An diesen Aufgaben ist zu erkennen, wie das Rechnen mit Wurzeln auf die Potenzrechnung zurückgeführt wird. Wer Aufgaben der Wurzelrechnung schnell und sicher lösen will, der muß mit beiden Schreibweisen gleich gut umgehen können. So müßte man die folgende Aufgabe mit der dargestellten Kürze lösen können.

3.) $\dfrac{\sqrt[n]{a^{2n-3}}\cdot(\sqrt[n]{a})^{n+7}}{\sqrt[n]{a^4}} = a^{\frac{2n-3}{n}+\frac{n+7}{n}-\frac{4}{n}} = a^{\frac{3n}{n}} = a^3$

4.) $\sqrt[5]{a\sqrt[3]{a^2}} = \sqrt[5]{a\cdot a^{\frac{2}{3}}} = \sqrt[5]{a^{\frac{5}{3}}} = \sqrt[3]{a}$

Rationalmachen des Nenners

In dem Ausdruck $\frac{2}{\sqrt{5}}$ ist der Nenner keine rationale Zahl, d.h. es gibt kein $p,q\in\mathbb{Z}$ mit $\frac{p}{q}=\sqrt{5}$. Man sagt $\sqrt{5}$ ist eine *irrationale* Zahl. Man rechnet nicht $2:2.2361$, sondern beseitigt das Wurzelzeichen aus dem Nenner, d.h. man macht den Nenner rational. Zu diesem Zweck erweitert man mit $\sqrt{5}$ und erhält:

$$\frac{2\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \frac{2}{5}\cdot\sqrt{5} = 0.8944.$$

Auch beim Rechnen mit allgemeinen Zahlsymbolen kann man den Ausdruck so umformen, daß der Nenner rational ist.

$$\frac{a}{\sqrt[3]{a}} = \frac{a\cdot\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}} = \frac{a^{\frac{5}{3}}}{a} = \sqrt[3]{a^2}$$

Im nächsten Beispiel erhält man das gewünschte Ergebnis durch mehrfache Anwendung der dritten binomischen Formel $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$:

$$\begin{aligned}\frac{13-10\sqrt{2}}{\sqrt{10}-\sqrt{5}+\sqrt{2}} &= \frac{(13-10\sqrt{2})(\sqrt{10}+(\sqrt{5}-\sqrt{2}))}{(\sqrt{10}-(\sqrt{5}-\sqrt{2}))(\sqrt{10}+(\sqrt{5}-\sqrt{2}))}\\ &= \frac{3\sqrt{10}-7\sqrt{5}-13\sqrt{2}+20}{3+2\sqrt{10}}\\ &= \frac{(3\sqrt{10}-7\sqrt{5}-13\sqrt{2}+20)(3-2\sqrt{10})}{(3+2\sqrt{10})(3-2\sqrt{10})}\\ &= \frac{-31\sqrt{10}+31\sqrt{5}+31\sqrt{2}}{-31} = \sqrt{10}-\sqrt{5}-\sqrt{2}\,.\end{aligned}$$

2.8 Rechnen mit allgemeinen Zahlsymbolen

Bei den allgemeinen Zahlsymbolen handelt es sich um Zeichen, manchmal auch Platzhalter genannt, die für beliebige Zahlen aus einem festen Zahlbereich stehen. Der für das folgende zugrundegelegte Zahlbereich ist $\mathbb{R}$. Die hier behandelten Rechengesetze leiten sich aus den Körperaxiomen der reellen Zahlen ab.

Auflösen von Klammern (in Verbindung von Addition und Subtraktion): Steht ein Pluszeichen vor der Klammer, so läßt man die Klammer einfach weg. Beim Minuszeichen sind beim Auflösen der Klammern alle in ihr vorkommenden Vorzeichen umzukehren:

$$\begin{aligned} 7m - (3n + 4m - 6p) + (11m - 9n) &= 7m - 3n - 4m + 6p + 11m - 9n \\ &= 14m - 12n + 6p \end{aligned}$$

Bei *mehrfachen Klammern* ist es vorteilhaft, mit dem Auflösen der inneren Klammern zu beginnen:

$$\begin{aligned} &17x + [6y - (3x + 4y)] - \{(8x - y) - [5x + (3y - 6x)]\} \\ &= 17x + [6y - 3x - 4y] - \{8x - y - [5x + 3y - 6x]\} \\ &= 17x + 6y - 3x - 4y - 8x + y + 5x + 3y - 6x \\ &= 5x + 6y. \end{aligned}$$

Das *Multiplizieren* einer algebraischen Summe mit einer Zahl ist einfach, z. B.

$$7(3m - 2n) = 21m - 14n$$

hierbei multipliziert man jeden Summanden mit dieser Zahl. Summen multipliziert man miteinander, indem man jedes Glied der einen Summe mit jedem Glied der anderen Summe multipliziert und diese Produkte zueinander addiert:

$$\begin{aligned} (2t + 4s)(4m - 3t + s) &= 8mt - 6t^2 + 2st + 16ms - 12st + 4s^2 \\ &= 8mt - 10st + 16ms - 6t^2 + 4s^2. \end{aligned}$$

Die *binomischen Formeln* muß man in beiden Richtungen auswendig können.

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ (a - b)(a + b) &= a^2 - b^2 \end{aligned}$$

Man muß z. B. für $(2x+3y)^2$ ohne weitere Zwischenrechnung sofort $4x^2+12xy+9y^2$ hinschreiben können und im Falle $u^2 - 8uv + 16v^2$ erkennen, daß es sich um die klammerfreie Darstellung von $(u - 4v)^2$ handelt. Das folgende Beispiel zeigt das Ausnutzen von Rechenvorteilen beim Kopfrechnen unter Anwendung der binomischen Formeln.

$$\begin{aligned} 204^2 = (200 + 4)^2 &= 40000 + 1600 + 16 = 41616 \\ 47^2 - 43^2 = (47 + 43)(47 - 43) &= 90 \cdot 4 = 360 \end{aligned}$$

Es ist von großem (Zeit-)Vorteil, wenn man sich $(a-b+c-d)^2$ als $(u+v)^2$ mit $u=a-b$ und $v=c-d$ vorstellt und das Ergebnis sofort hinschreiben kann:

$$a^2-2ab+b^2+2(a-b)(c-d)+c^2-2cd+d^2,$$

um dann bis zur klammerfreien Darstellung weiterzurechnen. Allgemein gilt:

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2+2a_1a_2+2a_1a_3+\cdots+2a_{n-1}a_n.$$

Für *höhere Potenzen* kann man aus den binomischen Formeln entsprechende Ausdrücke herleiten:

$$\begin{aligned}
(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\
(a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\\
(a+b)^5 &= a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5\\
&\ \ \vdots
\end{aligned}$$

Man erkennt, daß in jedem Summanden die Summe der Exponenten gleich ist. Der Exponent von a nimmt von Glied zu Glied um 1 ab, der von b dagegen steigt um 1. Doch wie hängen die Exponenten von a und b mit den Zahlenfaktoren vor ihnen zusammen? Um eine Antwort darauf geben zu können, führen wir ein neues Rechensymbol ein:

$$\binom{n}{k}:=\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,.$$

$\binom{n}{k}$ heißt *Binomialkoeffizient*, gesprochen „n über k“. Wir wollen einige Binomialkoeffizienten ausrechnen:

$$\binom{4}{1}=\frac{4}{1}=4,\quad \binom{4}{2}=\frac{4\cdot 3}{2}=6,\quad \binom{4}{3}=\frac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3}=4,\quad \binom{4}{4}=\frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=1.$$

Setzt man $\binom{n}{0}:=1$ für alle $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, so kann man $(a+b)^4$ folgendermaßen schreiben:

$$(a+b)^4=\binom{4}{0}a^4+\binom{4}{1}a^3b+\binom{4}{2}a^2b^2+\binom{4}{3}ab^3+\binom{4}{4}b^4.$$

Dieser für $n=4$ formulierte Zusammenhang gilt für jedes $n\in\mathbb{N}$:

$$(2)\qquad (a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\ldots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n}{n}b^n$$

Diese Formel muß man auswendig können. Will man die ausmultiplizierte Summe für $(a+b)^6$ hinschreiben, so muß man 7 Binomialkoeffizienten ausrechnen, genau genommen wegen $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$ noch 5. Da hilft uns eine der vielen Gesetzmäßigkeiten, die von den Binomialkoeffizienten erfüllt werden. Die Anordnung der Zahlen in der folgenden Tafel heißt *Pascalsches Dreieck*, benannt nach Blaise PASCAL (1623 – 1662).

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \cdots\cdots & & & & &
\end{array}
$$

Dieses Dreieck kann man sich bis zur n-ten Zeile schnell hinschreiben, jedesfalls schneller, als $n-2$ Binomialkoeffizienten auszurechnen, weil die Gesetzmäßigkeit, nach der dieses Dreick gebildet ist, einen einfachen Zugang zu seinen Zahlen ermöglicht: Jede Zahl im Inneren ist die Summe der beiden unmittelbar links und rechts darüberstehenden, der Rand besteht aus Einsen. Allgemein lautet diese Beziehung zwischen den Binomialkoeffizienten:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

Von großem schreibtechnischen Nutzen beim Aufschreiben von Formeln ist die abkürzende Schreibweise durch das Summenzeichen

$$\sum_{k=1}^{n} b_k := b_1 + b_2 + \cdots + b_n.$$

Man liest: Summe über b_k für $k=1$ bis n. k heißt Summationsindex und ist eine sogenannte gebundene Variable, d.h. man kann sie umbennen ohne das damit eine inhaltliche Änderung verbunden ist: $\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{i=1}^{n} b_i$. Eine etwas anspruchsvollere Anwendung ist die mit Hilfe von $\sum$ geschriebene Formel (2) :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k .$$

Zur Verkürzung der Schreibweise von Produkten hat man das *Produktzeichen* eingeführt:

$$\prod_{i=1}^{n} b_i = b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n.$$

Zur Übung schreiben wir $\binom{n}{k}$ mit Hilfe dieses Zeichens

$$\binom{n}{k} = \frac{\prod\limits_{\ell=n-k+1}^{n} \ell}{\prod\limits_{\ell=1}^{k} \ell}.$$

Wie kann man in einer solchen Formel einen Vorzeichenwechsel zum Ausdruck bringen? Offenbar ist $(-1)^k$ für gerade Exponenten $+1$ und für ungerade -1. Damit kann man $1-4+9-16+25$ in der Form $\sum_{k=1}^{5}(-1)^{k-1}k^2$ schreiben. Die Umwandlung in $\sum_{k=0}^{4}(-1)^k(k+1)^2$ nennt man eine *Indexverschiebung*. Beide Ausdrücke stellen dieselbe Summe dar.

Wegen $(a-b)^n = (a+(-b))^n$ gilt:

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \,,$$

als Verallgemeinerung der 2. binomischen Formel.

Division durch eine algebraische Summe

Die Division durch eine Summe aus allgemeinen Zahlsymbolen ist eine abgewandelte Anwendung der schriftlichen Division:

$$\begin{array}{l}
(200+80+6) : (20+2) = 10+3 \\
\underline{-(200+20)} \\
\quad 60+6 \\
\quad \underline{-(60+6)} \\
\qquad 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
(a^3-b^3) : (a-b) = a^2+ab+b^2 \\
\underline{-(a^3-a^2b)} \\
\quad a^2b-b^3 \\
\quad \underline{-(a^2b-ab^2)} \\
\qquad ab^2-b^3 \\
\qquad \underline{-(ab^2-b^3)} \\
\qquad\quad 0
\end{array}$$

Bei der Organisation der Rechnung sollten gleichartige Ausdrücke untereinander stehen. Das folgende Beispiel zeigt, daß die Division nicht immer aufgehen muß.

$$\begin{array}{llll}
(2a^3 & +3a^2x^2 & -2ax & -x^3) : (a^2-x) = 2a+3x^2+\frac{2x^3}{a^2-x} \\
\underline{-(2a^3} & & \underline{-2ax} & \underline{)} \\
\;0 & +3a^2x^2 & & -x^3 \\
 & \underline{-(3a^2x^2} & & \underline{-3x^3)} \\
 & & & 2x^3
\end{array}$$

Bevor man mit einer schriftlichen Division beginnt, kann man oft schneller zum Ziel kommen, wenn man sich durch gute Kenntnisse an Formeln erinnert oder das Enthaltensein des Divisors als Faktor im Dividenden erkennt:

$$\begin{aligned}
(u^2+uv+0.25v^2) : (u+0.5v) &= u+0.5v \\
(x^4+4x^3+6x^2+4x+1) : (x^2+2x+1) &= x^2+2x+1 \\
(x^2u+2xu+u-x^2-2x-1) : (u-1) &= x^2+2x+1.
\end{aligned}$$

Bruchrechnen mit allgemeinen Zahlsymbolen

Erweitern und Kürzen von Brüchen ergibt Formänderungen, in der Regel mit dem Ziel des Vereinfachens, die auch bei Brüchen aus Zahlsymbolen möglich sind. Will man

$$\frac{2c-5b}{6ab-10b^2} - \frac{5(2c-3a)}{18a^2-30ab} \tag{3}$$

vereinfachen, so ist kaum zu erkennen, daß das Ergebnis $\frac{c}{3ab}$ ist. Man muß also eine solche Aufgabe systematisch angehen. Wegen

$$6ab-10b^2 = 2b(3a-5b) \quad \text{und} \quad 18a^2-30ab = 2\cdot 3\cdot a(3a-5b)$$

ist $6ab(3a-5b)$ der Hauptnenner. Schreibt man (3) als einen Bruch, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}\frac{3a(2c-5b)-5b(2c-3a)}{6ab(3a-5b)} &= \frac{6ac-15ab-10bc+15ab}{6ab(3a-5b)} \\ &= \frac{6ac-10bc}{6ab(3a-5b)} = \frac{2c(3a-5b)}{6ab(3a-5b)} = \frac{c}{3ab}\,.\end{aligned}$$

Allgemeine Bemerkungen zum Umformen von Ausdrücken

Ein wichtiges Ziel dieses Kurses ist das Einüben von planvollem und zweckgerichtetem Vorgehen beim Bearbeiten von Aufgaben. Dabei ist die durch das Rechnen vieler Beispiele gewonnene Erfahrung die wertvollste Hilfe. Wie zahlreich die zur Lösung einer Aufgabe möglichen Wege sein können, zeigt das folgende Beispiel:
Man vereinfache den Ausdruck

$$\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\,.$$

1. Möglichkeit: Es handelt sich um zwei Brüche, die zunächst auf den Hauptnenner $a-b$ zu bringen sind.

$$\frac{(a-b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})-(a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b} = \frac{2\sqrt{b}(a-b)}{a-b} = 2\sqrt{b}\,.$$

2. Möglichkeit: Es wird $(a-b)$ ausgeklammert und dann auf den Hauptnenner gebracht:

$$(a-b)\left(\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right) = (a-b)\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})-(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(a-b)} = 2\sqrt{b}\,.$$

3. Möglichkeit: Das Rechnen mit Wurzeln wird durch die Substitution $u := \sqrt{a}$, $v := \sqrt{b}$ vermieden.

$$\frac{u^2-v^2}{u-v} - \frac{u^2-v^2}{u+v} = \frac{(u+v)(u-v)}{u-v} - \frac{(u+v)(u-v)}{u+v} = 2v = 2\sqrt{b}\,.$$

Welchen Weg man auch bevorzugt, der sichere Umgang mit den Rechenregeln ist eine notwendige Voraussetzung für erfolgreiches Bearbeiten solcher Aufgaben.

2.9 Logarithmen

In der Potenzrechnung wird in der Gleichung $a^n = b$ bei gegebener Basis a und gegebenem Exponenten n der Potenzwert b gesucht. Eine Umkehrung des Potenzierens ist das Radizieren (Wurzelziehen): $a = \sqrt[n]{b}$.

Sucht man schließlich bei gegebener Basis a und gegebenem Potenzwert b den Exponenten n, so spricht man vom *Logarithmieren* und schreibt $n = \log_a b$. Man sagt: n ist gleich dem Logarithmus von b zur Basis a. Es gilt also

$$a^x = b \iff x = \log_a b,$$

falls $0 < a \in \mathbb{R}$; denn für $a < 0$ ist das Auflösen nach x i.a. nicht möglich: $(-2)^x = 8$ hat keine Lösung $x \in \mathbb{R}$.
Einfache Logarithmen kann man im Kopf ausrechnen:

$$\begin{aligned}
x &= \log_{10} 1000 \iff 10^x = 1000 \iff x = 3 \\
x &= \log_3 81 \iff 3^x = 81 \iff x = 4 \\
x &= \log_2 0.25 \iff 2^x = \frac{1}{4} \iff x = -2 \\
x &= \log_9 3 \iff 9^x = 3 \iff x = \frac{1}{2} \\
x &= \log_8 0.5 \iff 8^x = 0.5 \iff x = -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Die Regeln für das Rechnen mit Logarithmen lassen sich leicht über die obige äquivalente Umformung mit Hilfe der Potenzrechengesetze herleiten.

$$\begin{aligned}
\log_a(m \cdot n) &= \log_a m + \log_a n \\
\log_a(\frac{m}{n}) &= \log_a m - \log_a n \\
\log_a p^r &= r \cdot \log_a p \\
\log_a \sqrt[r]{p} &= \frac{1}{r} \log_a p
\end{aligned}$$

Wir beweisen die erste Formel: $\log_a(m \cdot n) = x \iff a^x = m \cdot n$. Wir setzen $m := a^y$ ($\iff y = \log_a m$) und $n := a^z$ ($\iff z = \log_a n$). Aus $a^x = a^y a^z = a^{y+z}$ folgt $x = y + z$, weil Potenzen mit gleicher Basis genau dann gleich sind, wenn ihre Exponenten gleich sind, und damit ist $x = \log_a m + \log_a n$ bewiesen.

Beispiele:

$$\log_a \sqrt[3]{u^2v^5} = \frac{1}{3}(\log_a u^2v^5) = \frac{1}{3}(\log_a u^2 + \log{}_a v^5) = \frac{1}{3}(2\log_a u + 5\log_a v)$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\log_a(x^2 - xy + y^2) + \frac{1}{2}\log_a(x+y) &= \frac{1}{2}\log_a(x^2 - xy + y^2)(x+y) \\
&= \log_a \sqrt{(x^2 - xy + y^2)(x+y)}\,.
\end{aligned}$$

Die Rechenregeln für das Logarithmieren zeigen, daß alle Rechnungen auf die nächsteinfachere Rechenart zurückgeführt werden: Multiplikation auf die Addition und das Potenzieren auf die Multiplikation. Dieser Eigenschaft verdankt das Rechnen mit Logarithmen seine große Verbreitung (Logarithmentafel, Rechenstab) in der Zeit vor dem Taschenrechner. Die damals damit einhergehenden Abschätzungsverfahren der Größenordnung der Ergebnisse sind allerdings auch heute noch unerläßlich, weil der Umgang mit Taschenrechnern das Gefühl dafür nicht mitschult.

Logarithmensysteme

Die *gewöhnlichen, dekadischen oder Briggsschen Logarithmen* haben als Basis 10. Man schreibt diese Basis üblicherweise nicht mit, sondern kürzt mit lg ab. Da man jede positive Zahl x als Produkt einer Zahl $\bar{x}$, die zwischen 1 und 10 liegt, und einer Zehnerpotenz schreiben kann, genügt es bei den dekadischen Logarithmen, nur die Logarithmen der Zahlen zwischen 1 und 10 zu berechnen und in Tafeln festzuhalten. Diese Logarithmen liegen zwischen $\lg 1 = 0$ und $\lg 10 = 1$, beginnen also mit $0. \ldots$.

In der Wissenschaft und Technik wird die Basis $e = 2.7182\ldots$ verwendet, weil sie eine wichtige Rolle in der höheren Analysis spielt. Für Logarithmen zur Basis e verwendet man die Schreibweise ln und nennt sie auch *natürliche* Logarithmen.

Als Basis eines Logarithmensystems können alle positiven Zahlen außer 1 genommen werden. Will man den Zusammenhang zwischen den Logarithmen eines Systems mit der Basis a und den Logarithmen eines anderen Systems mit der Basis b herstellen, so muß man folgende Gleichung benutzen:

$$\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x$$

Beweis: Wir setzen $\ell := \log_b x$, $m := \log_b a$ und $n := \log_a x$ und formen äquivalent um in $b^\ell = x$, $b^m = a$ und $a^n = x$. Die erste und dritte Gleichung ergeben $b^\ell = a^n$ und unter Benutzung der zweiten wird hieraus $b^\ell = (b^m)^n = b^{m \cdot n}$. Dieses nun ist äquivalent zu $\ell = m \cdot n$, also $\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x$.

3 Gleichungen

In diesem Abschnitt sollen Bestimmungsgleichungen behandelt werden. Sie enthalten eine oder mehrere Unbekannte (Platzhalter), und unter dem Lösen einer solchen Gleichung versteht man die Aufgabe, *alle* Zahlen aus einem zugrundegelegten Zahlbereich (Grundmenge) zu suchen, die die Gleichung zu einer Identität machen. In einer *algebraischen* Gleichung werden mit der oder den Unbekannten nur algebraische Rechenoperationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Dividieren, Potenzieren, Radizieren) vorgenommen. In allen anderen Fällen spricht man von *transzendenten* Gleichungen. $3x^2 + \sqrt{x} + 2 = 0$ ist eine algebraische Gleichung in einer Unbekannten, $\sin^3 y + y^3 = 0$ ist eine transzendente Gleichung.

Wir wollen hier zunächst algebraische Gleichungen in einer Unbekannten betrachten. Jede solche Gleichung läß t sich auf *Normalform* bringen:

$$\sum_{\ell=0}^{n} a_\ell x^\ell = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, \quad a_\ell \in \mathbb{R}, \quad a_n = 1.$$

n bezeichnet man als den *Grad* der Gleichung, $\sum_{\ell=0}^{n} a_\ell x^\ell$ als Polynom in x (n-ten Grades mit reellen Koeffizienten).

Beispiel:
Man bringe die Gleichung

$$\frac{x - 1 + \sqrt{x^2 - 6}}{3(x-2)} = 1 + \frac{x-3}{x} \tag{4}$$

auf Normalform.
Nacheinander durchgeführte Umformungen liefern

$$\begin{aligned}
x(x - 1 + \sqrt{x^2 - 6}) &= 3x(x-2) + 3(x-2)(x-3) \\
x^2 - x + x\sqrt{x^2 - 6} &= 3x^2 - 6x + 3x^2 - 15x + 18 \\
x\sqrt{x^2 - 6} &= 5x^2 - 20x + 18 \\
x^2(x^2 - 6) &= 25x^4 - 200x^3 + 580x^2 - 720x + 324 \\
24x^4 - 200x^3 + 586x^2 - 720x + 324 &= 0 \\
x^4 - \frac{25}{3}x^3 + \frac{293}{12}x^2 - 30x + \frac{27}{2} &= 0 \text{ (Normalform)}
\end{aligned}$$

Will man von (4) die Lösungen suchen, so hat man einiges zu beachten. Zunächst ist (4) nur für $x \neq 2$ und $x \neq 0$ definiert, weder $x = 2$ noch $x = 0$ können daher Lösungen der Ausgangsgleichung sein. Unter den Lösungen der Normalform findet man alle Lösungen von (4), aber man muß prüfen, welche davon die Ausgangsgleichung erfüllen. Diese Überprüfung ist immer dann notwendig, wenn die Rechnungen nicht eindeutig umkehrbar sind. Der Schritt zur Beseitigung der Wurzel hätte auch für $-x\sqrt{x^2 - 6} = 5x^2 - 20x + 18$ zur selben Normalform geführt.

Aus diesen Ausführungen wird deutlich, daß das Lösen algebraischer Gleichungen auf die Berechnung der Nullstellen von Polynomen führt. Nun weiß man aber seit 1824

(Abel), daß es Polynome fünften und höheren Grades gibt, deren Nullstellen man *nicht* mit Hilfe algebraischer Operationen exakt angeben kann. Solche Formeln existieren nur bis einschließ lich $n = 4$. Man findet sie in Formelsammlungen. In diesem Kurs behandeln wir die Lösungsformel nur bis $n = 2$.

3.1 Lineare Gleichungen

Die allgemeine Form einer linearen Gleichung lautet:

$$a_1 x + a_0 = 0, \qquad a_0, a_1, \in \mathbb{R}, \quad a_1 \neq 0.$$

Man nennt a_1 das lineare, a_0 das absolute Glied. Es exisitiert stets eine reelle Lösung $x_1 = -\frac{a_0}{a_1}$.

3.2 Quadratische Gleichungen

Die Lösungsformel für

$$a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0, \qquad a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, \quad a_2 \neq 0.$$

leitet man mit Hilfe einer quadratischen Ergänzung her. Zunächst aber wird die Gleichung normiert, d.h. durch Divisision der Gleichung durch a_2 wird der Koeffizient der höchsten Potenz 1. Man erhält

$$x^2 + \frac{a_1}{a_2} x + \frac{a_0}{a_2} = 0$$

Mit den Abkürzungen $p := \frac{a_1}{a_2}$ und $q := \frac{a_0}{a_2}$ lautet die Normalform

$$x^2 + px + q = 0. \tag{5}$$

Quadratische Ergänzung ergibt

$$\begin{aligned} x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \\ \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \\ x + \frac{p}{2} &= \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \end{aligned}$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\,. \tag{6}$$

Benutzt man die Lösungsformel (6), so muß man p und q der normierten Gleichung (5) entnehmen. Das klingt so selbstverständlich, das Vergessen der Division durch a_2 ist aber ein häufiger Fehler.

Über die Art der Lösungen entscheidet der Radikand $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$. Er heiß t deshalb Diskriminate (lateinisch descriminare: trennen, entscheiden).

Beim Bearbeiten umfangreicher Aufgaben erschweren Rechenfehler oft den Fortgang der Rechnungen. Man sollte daher Rechenproben kennen und anwenden. In diesem Fall kann man die Nullstellen durch Einsetzen in die erste(!) Zeile des Rechenablaufs oder mit Hilfe der Kontrollformeln

$$x_1 + x_2 = -\frac{a_1}{a_2} = -p \qquad\qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{a_0}{a_2} = q$$

überprüfen (Satz von VIETA).

3.3 Gleichungen höheren Grades

Allgemein ist die Frage von Interesse, ob eine Gleichung der Form

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0\,, \qquad\qquad a_i \in \mathbb{R}, \quad a_n \neq 0$$

in der Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen immer eine Lösung hat. Die Antwort gibt der sogenannte *Fundamentalsatz der Algebra*. Er lautet:

> *Ist der Grad n einer algebraischen Gleichung positiv, so hat diese genau n Lösungen; dabei sind die Lösungen in ihren Vielfachheiten gezählt.*

Sind die Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$ reell, so ist mit jeder Lösung α auch die konjugiert-komplexe Zahl $\overline{\alpha}$ eine Lösung mit derselben Vielfachheit. Eine Gleichung, die keine reelle Lösung besitzt, für die also α und $\overline{\alpha}$ stets verschiedene Lösungen sind, hat demnach einen geraden Grad oder mit anderen Worten: *Eine reelle algebraische Gleichung ungeraden Grades hat mindestens eine reelle Lösung.*

Wir behandeln einige Spezialfälle:

1.) $a_0 = 0$.
In diesem Fall ist $x_1 = 0$ eine Lösung. Man kann den Grad der Gleichung um 1 erniedrigen, indem man x ausklammert.
Beispiel:

$$-2x^3 + 5x^2 - 2x = 0 \tag{7}$$

$$x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x = 0 \tag{8}$$

$$x\left(x^2 - \frac{5}{2}x + 1\right) = 0 \tag{9}$$

$$x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = \frac{1}{2}. \tag{10}$$

2.) Es ist eine Lösung $x_1 = k$ bekannt.
Dividiert man die Gleichung durch $(x - k)$, so geht diese Polynomdivision ohne Rest auf. Das Ergebnis ist eine Gleichung, deren Grad um 1 erniedrigt ist.
Beispiel:

$$(3x^3 - 18x^2 - 59x + 258) : (x - 3) = 3x^2 - 9x - 86.$$

Weitere Nullstellen neben $x = 3$ berechnet man durch Lösen der quadratischen Gleichung $x^2 - 3x - \frac{86}{3} = 0$.

3.) Die Gleichung enthält nur Exponenten, die Vielfache einer natürlichen Zahl $k \neq 1$ sind.
Durch die Substitution $z = x^k$ reduziert man den Grad des Polynoms auf $\frac{n}{k}$.
Beispiel:

$$x^4 + x^2 - 12 = 0.$$

Die Substitution $z = x^2$ liefert $z^2 + z - 12 = 0$ mit den Lösungen $z_1 = -4$ und $z_2 = 3$, also $x^2 = -4$ und $x^2 = 3$. Daraus erhält man die vier Nullstellen $+2i$, $-2i$, $+\sqrt{3}$ und $-\sqrt{3}$.

3.4 Das Horner-Schema

Zur Berechnung des Wertes eines Polynoms $P(x)$ an der Stelle x_0:

$$P(x_0) = \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell x_0^\ell$$

benötigt man $2n - 1$ Multiplikationen und n Additionen.

Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x) &:= 2x^4 - 8x^3 + 2x^2 + 28x - 48 \\ f(-3) &= 2 \cdot (-27) \cdot (-3) - 8 \cdot 9 \cdot (-3) + 2 \cdot (-3) \cdot (-3) + 28 \cdot (-3) - 48 \\ &= 264. \end{aligned}$$

Man überzeugt sich leicht, daß man $f(x)$ auch in der Form

$$f(x) = \Big(((2 \cdot x - 8) \cdot x + 2) \cdot x + 28\Big) \cdot x - 48$$

schreiben kann.
Allgemein gilt

$$\sum_{\ell=0}^{n} a_\ell x^\ell = \Big(\cdots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \cdots + a_1\Big)x + a_0. \tag{11}$$

Die Schreibweise eines Polynoms in der Form (11) heiß t *Horner-Darstellung* und reduziert die Berechnung von $P(x_0)$ auf n Multiplikationen und n Additionen. Übersichtlicher gestaltet sich die Rechnung mit folgendem *Horner-Schema*:

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 2 & -8 & 2 & 28 & -48 \\
+ & & -6 & 42 & -132 & 312 \\
\hline
x_0 = -3 & 2 & -14 & 44 & -104 & 264
\end{array}$$

Die erste Zeile wird von den Koeffizienten gebildet („fehlende“ Koeffizienten sind mit Nullen aufzufüllen!). Das Entstehen des Schemas erklärt sich, wenn man in (11) die rechte Seite von innen nach außen ausmultipliziert:

$$f(-3) = \Big(\Big(((-3) \cdot 2 - 8) \cdot (-3) + 2\Big) \cdot (-3) + 28\Big) \cdot (-3) - 48.$$

Faß t man die sich bei der Rechnung ergebende dritte Zeile als die Koeffizienten eines Polynoms auf:

$$P(x) := c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0\,,$$

so kann man zeigen, daß

$$P(x) = (x - x_0)(c_n x^{n-1} + c_{n-1} x^{n-2} + \cdots + c_2 x + c_1) + P(x_0)$$

gilt. Daraus ergibt sich eine wichtige Konsequenz für die Berechnung der Nullstellen von $P(x)$. Ist $P(x_0) = 0$, also x_0 eine Nullstelle, so gilt

$$P(x) : (x - x_0) = c_n x^{n-1} + c_{n-1} x^{n-2} + \cdots + c_2 x + c_1\ .$$

Die dritte Zeile setzt sich also aus den Koeffizienten des um den Linearfaktor $x - x_0$ reduzierten Polynoms zusammen. Zur Demonstration zerlegen wir $f(x)$ vollständig in Linearfaktoren:

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 2 & -8 & 2 & 28 & -48 \\
+ & & 6 & -6 & -12 & 48 \\
\hline
3 & 2 & -2 & -4 & 16 & 0 \\
+ & & -4 & 12 & -16 & \\
\hline
-2 & 2 & -6 & 8 & 0 &
\end{array}$$

Damit sind zwei Nullstellen gefunden: $x_{01} = 3$, $x_{02} = -2$. Die beiden restlichen sind Lösungen der Gleichung

$$2x^2 - 6x + 8 = 0 \iff x^2 - 3x + 4 = 0 \iff x_{0\,3,4} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{-7}}{2}\,.$$

Die vollständige Zerlegung in Linearfaktoren lautet:

$$f(x) = 2(x-3)(x+2)\left(x - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-7}\right)\left(x - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-7}\right).$$

Sind die Koeffizienten des Polynoms aus der Menge $\mathbb{Q}$, dann lassen sich die rationalen Nullstellen mit dem Horner-Schema leicht berechnen.

- Man verwandelt die Gleichung $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ mit $a_i \in \mathbb{Q}$ in eine Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten, indem man mit dem Hauptnenner der a_i multipliziert: $b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0 = 0$, $b_i \in \mathbb{Z}$.

- Die rationalen Nullstellen findet man unter den Brüchen $\frac{r}{s}$ $r, s \in \mathbb{Z}$, in denen r ein Teiler von b_0 und s ein Teiler von b_n ist.
- Mit Hilfe des Horner-Schemas sucht man unter ihnen die Nullstellen.

Beispiel:
Man suche die rationalen Nullstellen des Polynoms

$$x^3 + \frac{7}{10}x^2 - \frac{2}{5}x - \frac{1}{10}\,.$$

Man findet

$$x^3 + \frac{7}{10}x^2 - \frac{2}{5}x - \frac{1}{10} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 10x^3 + 7x^2 - 4x - 1 = 0\,.$$

Die rationalen Nullstellen liegen in der Menge $\left\{\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{5}, \pm\frac{1}{10}\right\}$. Durch Einsetzen findet man $x_{01} = \frac{1}{2}$, $x_{02} = -\frac{1}{5}$, $x_{03} = -1$.

3.5 Wurzelgleichungen

Wurzelgleichungen enthalten die Variable im Radikanden einer oder mehrerer Wurzeln. Um die Glieder, die die Variable enthalten, zusammenfassen zu können, müssen die Wurzeln beseitigt werden. Dieses geschieht dadurch, daß durch geeignetes Umstellen der Gleichung und anschließendes Potenzieren die Anzahl der Wurzeln vermindert wird. Dieses Verfahren muß eventuell mehrmals wiederholt werden.

Da das Potenzieren einer Gleichung keine äquivalente Umformung ist, und da z.B. bei Quadratwurzeln der Definitionsbereich durch die Positivitätsbedingung des Radikanden eingeschränkt ist, entstehen bei diesem Verfahren Scheinlösungen. Bei Wurzelgleichungen gehört daher die Probe zum Lösungsverfahren!

Beispiele:

1.)

$$\begin{aligned}
2 + \sqrt{7-2x} &= x \\
\sqrt{7-2x} &= x - 2 \\
7 - 2x &= (x-2)^2 \\
x^2 - 2x - 3 &= 0 \;\text{ Normalform} \\
x_{1,2} &= 1 \pm \sqrt{4} \\
x_1 &= 3 \quad [x_2 = -1] \\
\text{Probe für } x_1\text{: } 2 + \sqrt{1} &= 3 \text{ Lösung} \\
\text{Probe für } x_2\text{: } 2 + \sqrt{9} &\neq -1 \text{ keine Lösung}
\end{aligned}$$

2.)

$$\sqrt{3x+5} + 5 = 0.$$

Die gegebene Gleichung kann keine Lösung besitzen; denn der Wurzelwert ist immer nichtnegativ und die linke Seite niemals kleiner als 5.

4 Vektorrechnung

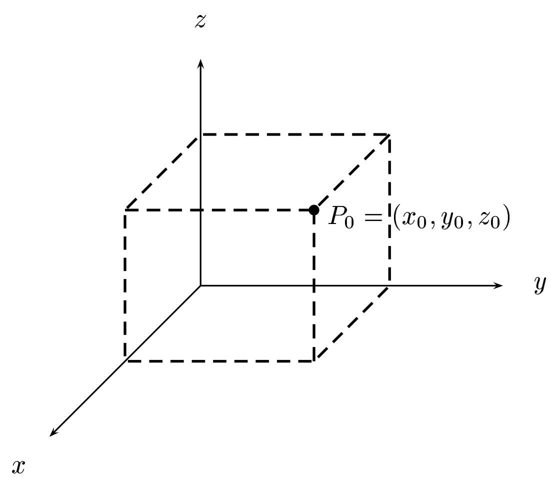
In der Mathematik, Physik und Technik gibt es Größen, die allein durch eine Zahl (Skalar) gekennzeichnet sind: z.B. Zeit, Temperatur, Stromstärke. Daneben findet man aber auch Größen, zu deren Beschreibung eine Zahl *und* eine Richtung benötigt werden: z.B. Geschwindigkeit, Kraft, Feldstärke. Solche Größen werden durch Vektoren erfaßt.

4.1 Kartesische Koordinaten im Raum

Ein kartesisches Koordinatensystem im Raum wird aus drei sich in einem Punkt $\mathfrak{O}$ (Nullpunkt oder Ursprung) rechtwinklig schneidenden Geraden gebildet. Man bezeichnet sie als x-, y- und z-Achse. Von den möglichen Anordnungen wählt man diejenige, bei der die Drehung der positiven x-Achse um $90°$ in Richtung der positiven y-Achse der Korkenzieherregel (für Rechtshänder) genügt, d.h. die Richtung der z-Achse ist gleich der Einschraubrichtung des Korkenziehers.

Die drei Achsen sind wie die reelle Zahlengerade skaliert, und zwar alle im selben Maßstab. Die drei durch je zwei Achsen bestimmten Ebenen heißen (x, y)-Ebene, (x, z)-Ebene und (y, z)-Ebene. Jedem Punkt P_0 des Raumes wird umkehrbar eindeutig ein Zahlentripel (x_0, y_0, z_0) zugeordnet, indem man die Schnittpunkte der entsprechenden Achsen mit den zu den Koordinatenebenen parallelen Ebenen durch P_0 bildet. Man nennt x_0, y_0, z_0 die Koordinaten des Punktes P_0. Die Menge aller Punkte des Raumes bezeichnen wir mit

$$\mathbb{R}^3 := \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}\,.$$

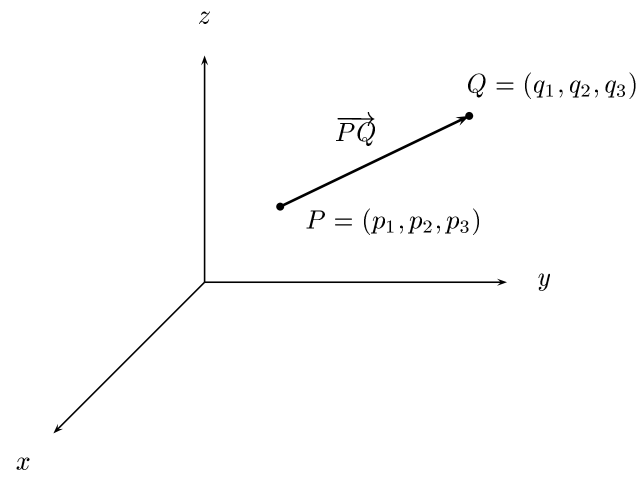


4.2 Vektoren

Zu zwei Punkten des Raumes gibt es eine Lagebeziehung, die man durch einen Pfeil veranschaulichen kann, der von P nach Q führt und suggestiv mit $\overrightarrow{PQ}$ bezeichnet wird. Verschiebt man P bzw. Q in derselben Richtung mit derselben Länge, man sagt durch dieselbe *Translation*, so bleibt die Lagebeziehung von P und Q zu ihren verschobenen Bildern P' und Q' gleich. Da ein Vektor nur ein anderes Wort für eine solche Lagebeziehung ist, gilt $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'}$.

Wir wollen den Zusammenhang zwischen Punkten und Vektoren noch auf eine andere Weise beschreiben. In der Mathematik sind die Operationen sehr oft zwischen den Elementen einer Menge definiert, und das Ergebnis ist wieder ein Element dieser Menge. Abweichend davon definieren wir jetzt eine Verknüpfung zwischen einem Punkt und einem Vektor, dessen Ergebnis ein Punkt ist:

$$P \dot{+} \overrightarrow{PQ} = Q$$



Sind die Punkte in Form von $P = (p_1, p_2, p_3)$ und $Q = (q_1, q_2, q_3)$ durch ihre Koordinaten gegeben, und ist die Verknüpfung von Punkt und Vektor durch

$$(p_1, p_2, p_3) \dot{+} (v_1, v_2, v_3) := (p_1 + v_1, p_2 + v_2, p_3 + v_3)$$

definiert, so kann man den Vektor $\overrightarrow{PQ}$ leicht berechnen:

$$\overrightarrow{PQ} = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3).$$

Es gibt also genau einen Vektor von P nach Q.

Der Vektor $\overrightarrow{PP} = (0, 0, 0)$ heißt Nullvektor und wird mit $\vec{o}$ bezeichnet.
Ist $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, so definiert man $-\vec{a} := (-a_1, -a_2, -a_3)$, und folglich ist $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$.
Naheliegend versteht man unter der Länge $|\overrightarrow{PQ}|$ des Vektors $\overrightarrow{PQ}$ die Entfernung zwischen P und Q . Nach dem Satz des Pythagoras gilt:

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2}\,.$$

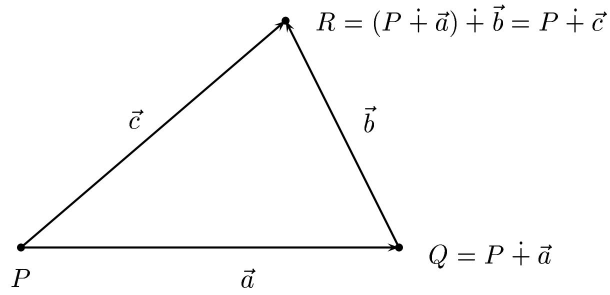
Beispiel: $P = (4, 2, -1), \quad Q = (7, -2, -1) \quad \overrightarrow{PQ} = (3, -4, 0), \quad |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{25} = 5.$
Dividiert man $\vec{a} \neq \vec{o}$ durch seine Länge $|\vec{a}|$:

$$\vec{a}_0 := \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}\,,$$

so erhält man einen Vektor der Länge 1. $\vec{a}_0$ heißt Einheitsvektor von $\vec{a}$.
Beispiel: $\vec{a} = (1, -2, 4)$, $\vec{a}_0 = \frac{1}{\sqrt{21}}(1, -2, 4)$.

4.3 Die Addition von Vektoren

Zu drei Punkten P, Q, R des Raumes gibt es Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ mit $Q = P \dot{+} \vec{a}$ und $R = Q \dot{+} \vec{b} = (P \dot{+} \vec{a}) \dot{+} \vec{b}$ und $R = P \dot{+} \vec{c}$



Offenbar gilt $R = P \dot{+} \vec{c} = (P \dot{+} \vec{a}) \dot{+} \vec{b}$. Ein Übergang auf das Rechnen mit Koordinaten hellt den Zusammenhang zwischen diesen beiden Darstellungen auf:

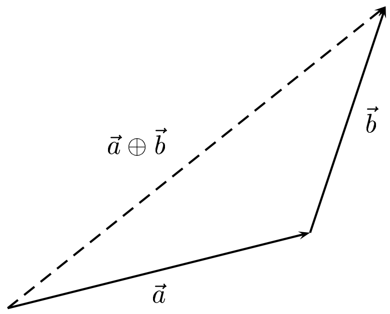
$$\begin{aligned} R &= (p_1 + a_1, p_2 + a_2, p_3 + a_3) \dot{+} (b_1, b_2, b_3) \\ &= ((p_1 + a_1) + b_1, (p_2 + a_2) + b_2, (p_3 + a_3) + b_3) \\ &= (p_1 + (a_1 + b_1), p_2 + (a_2 + b_2), p_3 + (a_3 + b_3)) \\ &= (p_1, p_2, p_3) \dot{+} (c_1, c_2, c_3)\,. \end{aligned}$$

Da es genau einen Vektor von P nach R gibt, muß $\vec{c} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$ sein. Daher definieren wir

$$\vec{a} \oplus \vec{b} := (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3),$$

wobei wir mit $\oplus$ eine neues Verknüpfungszeichen für die Additon von Vektoren einführen, um einen Verfremdungseffekt zum Pluszeichen für die Addition von Zahlen zu erzielen.

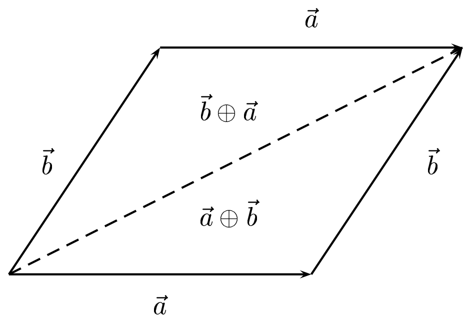
Zeichnerisch erhält man die Summe, indem man den Anfang von $\vec{b}$ an die Spitze von $\vec{a}$ anfügt; der Vektor $\vec{a} \oplus \vec{b}$ verbindet dann den Anfang von $\vec{a}$ mit der Spitze von $\vec{b}$. Diese Konstruktion nennt man *Parallelogrammregel*.



Für beliebige Vektoren gelten die folgenden Rechenregeln:

$$\begin{array}{rcll} \vec{a} \oplus \vec{o} & = & \vec{a} & \\ \vec{a} \oplus \vec{b} & = & \vec{b} \oplus \vec{a} & \text{Kommutativgesetz} \\ (\vec{a} \oplus \vec{b}) \oplus \vec{c} & = & \vec{a} \oplus (\vec{b} \oplus \vec{c}) & \text{Assoziativgesetz} \\ \vec{a} \oplus (-\vec{a}) & = & \vec{o} & \end{array}$$

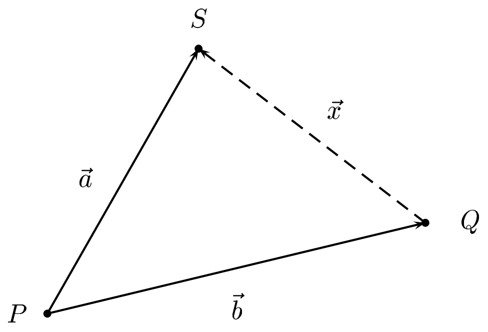
Das Kommutativgesetz kann man sich geometrisch anhand der Parallelogrammregel klarmachen:



Die Differenz von Vektoren wird eingeführt durch

$$\vec{a} - \vec{b} := \vec{a} \oplus (-\vec{b}).$$

Man betrachte folgende Skizze:



und drücke den Vektor $\vec{x}$, der Q mit S verbindet, als Kombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus! Offenbar gilt $P \dotplus (\vec{b}+\vec{x}-\vec{a}) = P$, also ist $\vec{b}+\vec{x}-\vec{a} = \vec{o}$ und damit $\vec{x} = \vec{a}-\vec{b}$. Diese Argumentation wird oft in allgemeiner Form benötigt: Bilden Vektoren einen geschlossenen Vektorzug, so ist ihre Summe der Nullvektor, und man kann jeden von ihnen durch eine *Linearkombination* der anderen ausdrücken.

4.4 Die skalaren Vielfachen eines Vektors

Für einen Vektor $\vec{a}$ und eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ wird mit $\lambda \odot \vec{a}$ derjenige Vektor definiert, der die Länge $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$ besitzt. Für $\lambda > 0$ hat er dieselbe, für $\lambda < 0$ die entgegengesetzte Richtung wie $\vec{a}$. Mit

$$\lambda \odot \vec{a} := (\lambda \cdot a_1, \lambda \cdot a_2, \lambda \cdot a_3)$$

überträgt man die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar auf das Rechnen mit Koordinaten, und wegen

$$\sqrt{\lambda^2 a_1^2 + \lambda^2 a_2^2 + \lambda^2 a_3^2} = |\lambda|\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$$

hat $\lambda \odot \vec{a}$ die geforderte Länge.
Beispiel: $-3 \odot (1, -2, 4) = (-3, 6, -12)$.
Für die Multiplikation von Vektoren mit Skalaren (= Zahlen) gelten folgende Regeln:

$$\begin{array}{rcl} \alpha \odot (\beta \odot \vec{a}) & = & (\alpha \cdot \beta) \odot \vec{a} \\ \alpha \odot (\vec{a} \oplus \vec{b}) & = & (\alpha \odot \vec{a}) \oplus (\alpha \odot \vec{b}) \\ (\alpha + \beta) \odot \vec{a} & = & (\alpha \odot \vec{a}) \oplus (\beta \odot \vec{a}) \end{array}$$

Beispiele:

1.) $-3 \odot (4 \odot (2, 3, -2)) = -12 \odot (2, 3, -2) = (-24, -36, 24)$.

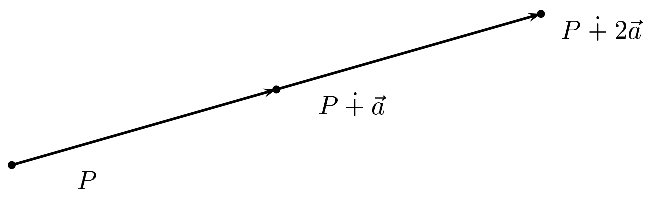
2.) $3 \odot (1, 2, -1) \oplus 4 \odot (1, 2, -1) = 7 \odot (1, 2, -1) = (7, 14, -7)$.

Die Verknüpfungszeichen $\oplus$ und $\odot$ wurden verwendet, damit gegenüber $+$ und $\cdot$ ein Verfremdungseffekt eintritt. Die Addition von Vektoren ist formal etwas anderes als die

Addition zwischen Zahlen, genauso wie die Multiplikation einer Zahl mit einem Vektor nicht mit der Multiplikation zweier Zahlen durcheinandergebracht werden darf. Da wir hoffen, daß dieser Verfremdungseffekt seine Wirkung getan hat, kehren wir zum gewohnten $+$ und $\cdot$ zurück, werden aber zur besseren Unterscheidung Skalare mit griechischen und Vektoren mit lateinischen Buchstaben bezeichnen.

4.5 Geraden und Ebenen

Ist P ein Punkt und $\vec{a} \neq \vec{o}$ ein Vektor, dann sind P, $P \dot{+} \vec{a}$ und $P \dot{+} 2\vec{a}$ drei *kollineare* Punkte.



Die Menge

$$\left\{Q \mid Q = P \dot{+} \lambda \cdot \vec{a},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

heißt Gerade durch P in Richtung $\vec{a}$. Sie hat dieselben Eigenschaften wie die reelle Zahlengerade.

Sind $\vec{a}, \vec{b}$ zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren, die nicht parallel sind, also für die $\vec{a} \neq \alpha \cdot \vec{b}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt, so heißt die Punktmenge

$$\left\{Q \mid Q = P \dot{+} (\lambda\vec{a} + \sigma\vec{b}),\ \ \lambda, \sigma \in \mathbb{R}\right\}$$

die in P durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannte Ebene.

Zur Vereinfachung führen wir für Geraden und Ebenen die folgenden Schreibweisen ein:

$$\begin{aligned} g : \vec{x} = P \dot{+} \lambda\vec{a} &:= \left\{Q \mid Q = P \dot{+} \lambda\vec{a},\ \ \lambda \in \mathbb{R}\right\} \\ E : \vec{x} = P \dot{+} \lambda\vec{a} + \sigma\vec{b} &:= \left\{Q \mid Q = P \dot{+} \lambda\vec{a} + \sigma\vec{b},\ \ \lambda, \sigma \in \mathbb{R}\right\}. \end{aligned}$$

Sprechweise: g ist die Menge aller Punkte, die man erhält, wenn man zu einem festen Punkt P alle Vielfachen des Vektors $\vec{a}$ addiert, und E ist die Menge aller Punkte, die man erhält, wenn man zu einem festen Punkt P alle Linearkombinationen aus den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ addiert.

4.6 Schnitt von Geraden und Ebenen

Will man die gemeinsamen Elemente von Punktmengen berechnen, so muß man die Punkte ermitteln, die die definierenden Eigenschaften gleichzeitig erfüllen. Das führt hier auf *lineare Gleichungssysteme*.

Beispiel:
Man berechne den Durchstoßpunkt der Geraden

$$\begin{aligned} g : \vec{x} &= (2,2,1) \dot{+} \lambda(1,-1,2) \text{ mit der Ebene} \\ E : \vec{x} &= (3,-2,1) \dot{+} \sigma(0,1,2) + \tau(-2,1,-2). \end{aligned}$$

Ist S der gesuchte Punkt, so liegt S auf der Geraden und auf der Ebene. Also gilt offensichtlich

$$S = (2,2,1) \dot{+} \lambda(1,-1,2) = (3,-2,1) \dot{+} \sigma(0,1,2) + \tau(-2,1,-2),$$

wobei die Werte für λ, σ und τ noch bestimmt werden müssen.

Bringt man alle Terme, die einen Parameter enthalten, auf die linke Seite und alle absoluten Glieder auf die rechte Seite, so erhält man folgendes lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcr} \lambda & + & & + & 2\tau & = & 1 \\ -\lambda & - & \sigma & - & \tau & = & -4 \\ 2\lambda & - & 2\sigma & + & 2\tau & = & 0 \end{array}$$

Die Lösungen eines linearen Gleichungssystems errechnet man systematisch mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens. Es benutzt drei Umformungen, die das System in ein äquivalentes überführen:

1. Vertauschung zweier Gleichungen.

2. Multiplikation einer Gleichung mit einer Zahl $\alpha \neq 0$.

3. Addition des Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen.

4. Vertauschen zweier Spalten (auf der linken Seite einschließlich der Umsortierung der Kopfzeile)

Es ist das Ziel, diese Umformungen so anzuwenden, daß auf der linken Seite eine sogenannte *Zeilenstufenform* entsteht. Wir demonstrieren dies anhand der gestellten Aufgabe und benutzen zur Verringerung der Schreibarbeit ein Schema, das sich selbst erklärt, r steht für „rechte Seite“.

λ	σ	τ	r	
1	0	2	1	
-1	-1	-1	-4	I + II
2	-2	2	0	I - 2$\cdot$ II
1	0	2	1	
0	-1	1	-3	
0	-2	-2	-2	
1	0	2	1	$\Rightarrow \lambda = 3$
0	-1	1	-3	$\Rightarrow \sigma = 2$
0	0	-4	4	$\Rightarrow \tau = -1$

Die angestrebte Zeilenstufenform ist dadurch gekennzeichnet, daß von oben nach unten die Anzahl der am Anfang stehenden Nullen um mindestens eine zunimmt. Ist das Gleichungssystem lösbar, so erhält man die Lösungen durch Rückwärtseinsetzen. In diesem Fall gibt es genau eine Lösung, den Durchstoßpunkt von g mit E. Man errechnet seine Koordinaten $P = (5, -1, 7)$ indem man $\lambda = 3$ in die Parameterdarstellung für g einsetzt (und als Probe die Richtigkeit der Rechnung mit $\sigma = 2$ und $\tau = -1$ an der Parameterdarstellung für E überprüft).

Verläuft die Gerade außerhalb der Ebene und parallel, so ergibt sich ein Widerspruch beim Lösen des zugehörigen Gleichungssystems.

Beispiel:
Man berechne die Schnittmenge von

$$g : \vec{x} = (1, -1, 1) \dot{+} \lambda(1, -2, 1) \text{ mit der Ebene}$$
$$E : \vec{x} = (0, 1, 2) \dot{+} \sigma(2, 2, 1) + \tau(-1, -4, 0).$$

λ	σ	τ	r	
1	-2	1	-1	
-2	-2	4	2	
1	-1	0	1	
1	-2	1	-1	
0	-6	6	0	
0	1	-1	2	
1	-2	1	-1	
0	-1	1	0	
0	1	-1	2	
1	-2	1	-1	
0	-1	1	0	
0	0	0	2	$\Rightarrow$ Widerspruch

Wie man λ, σ, τ auch wählt, immer ist $0 \cdot \lambda + 0 \cdot \sigma + 0 \cdot \tau = 0$ und damit im Widerspruch zur Forderung $= 2$. Die Schnittmenge von g und E ist leer, es gibt keinen Durchstoßpunkt.

Der dritte Fall tritt auf, wenn die Gerade eine Teilmenge der Ebene ist, also ganz in der Ebene verläuft.

Beispiel:
Man berechne die Schnittmenge von

$$g : \vec{x} = (1, 2, -1) \dotplus \lambda(-1, 0, 3) \text{ und der Ebene}$$
$$E : \vec{x} = (1, 1, 0) \dotplus \sigma(-1, 2, 1) + \tau(0, 1, -1).$$

λ	σ	τ	r	
-1	1	0	0	
0	-2	-1	-1	
3	-1	1	1	
-1	1	0	0	
0	-2	-1	-1	
0	2	1	1	
-1	1	0	0	$\Rightarrow \lambda = \omega$
0	-2	-1	-1	$\Rightarrow \tau = -2\omega + 1$
0	0	0	0	$\sigma = \omega$

Die letzte Gleichung kann weggelassen werden, da $0 = 0$ keine Information für den Zusammenhang der Variablen enthält. Damit handelt es sich um 2 Gleichungen mit drei Unbekannten, so daß man eine Variable willkürlich wählen kann. Wir bringen das durch Einführung einer vierten Variablen $\sigma = \omega$ zum Ausdruck. Dann errechnet man durch Rückwärtseinsetzen $\tau = -2\omega + 1$ und $\lambda = \omega$.
Für jede Wahl von ω erhalten wir eine andere Lösung, d.h. einen anderen der unendlich vielen gemeinsamen Punkte von E und g.

Insgesamt haben wir die drei Lösungsmöglichkeiten eines linearen Gleichungssystems kennengelernt: eindeutige Lösung, keine Lösung, unendlich viele Lösungen. Sie haben in den Lagebeziehungen von Gerade und Ebene ihre Entsprechungen:

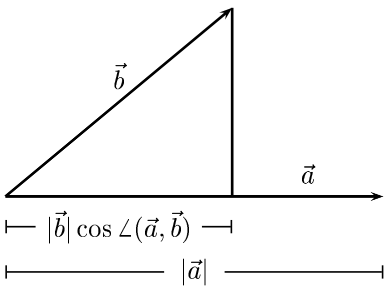
1. nicht parallel

2. parallel ohne gemeinsamen Punkt

3. parallel mit gemeinsamen Punkten.

4.7 Skalarprodukt

Das Skalarprodukt $\vec{a} * \vec{b}$, auch inneres Produkt genannt, ist gleich dem Produkt aus der Länge von $\vec{a}$ und der Länge der senkrechten Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$, also eine reelle Zahl und nicht etwa wieder ein Vektor.



$$\vec{a} * \vec{b} := |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

Dies ist eine einfache, anschaulich formulierte Definition. Sie besitzt wichtige geometrische Anwendungen, daher muß man sie auswendig können. Offenbar sind die Rollen von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ vertauschbar:

$$\vec{b} * \vec{a} := |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}).$$

Man kann also auch $\vec{a}$ auf $\vec{b}$ projizieren und die Länge der Projektion mit $|\vec{b}|$ multiplizieren.

Die folgenden Rechenregeln lassen sich durch Zurückgehen auf die Definition leicht beweisen:

1. $\vec{a} * \vec{b} = \vec{b} * \vec{a}$
2. $(\alpha \cdot \vec{a}) * \vec{b} = \vec{a} * (\alpha \cdot \vec{b}) = \alpha \cdot (\vec{a} * \vec{b})$
3. $(\vec{a} + \vec{b}) * \vec{c} = \vec{a} * \vec{c} + \vec{b} * \vec{c}$
4. $\vec{a} * \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}$
5. $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} * \vec{a}}$

Aus diesen Rechenregeln ergeben sich Konsequenzen für das Rechnen mit Koordinaten. Sind in einem kartesischen Koordinatensystem $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2(0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ und

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 \qquad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3) = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3\,,$$

so folgt aus 2. und 3.:

$$\begin{aligned} \vec{a} * \vec{b} &= (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) * (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3) \\ &= a_1b_1(\vec{e}_1 * \vec{e}_1) + a_1b_2(\vec{e}_1 * \vec{e}_2) + a_1b_3(\vec{e}_1 * \vec{e}_3) + a_2b_1(\vec{e}_1 * \vec{e}_2) + \cdots + a_3b_3(\vec{e}_3 * \vec{e}_3)\,. \end{aligned}$$

Wegen

$$\vec{e}_i * \vec{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

gilt

$$\vec{a} * \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 \,.$$

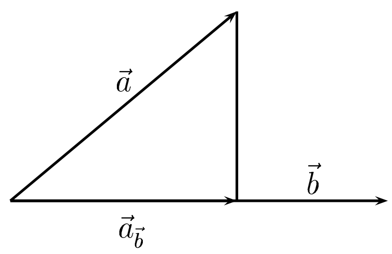
Beispiele:

Bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems sei $\vec{a} = (1,2,1)$ und $\vec{b} = (1,0,3)$.

$$\vec{a} * \vec{b} = (1,2,1) * (1,0,3) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 3 = 4$$

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{4}{\sqrt{6}\sqrt{10}} = \frac{4}{\sqrt{60}} \approx 0.516 \quad \Longrightarrow \quad \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 1.03 \ \ \text{(Bogenmaß)}$$

Wie groß ist die Komponente $\vec{a}_{\vec{b}}$ von $\vec{a}$ in Richtung $\vec{b}$?

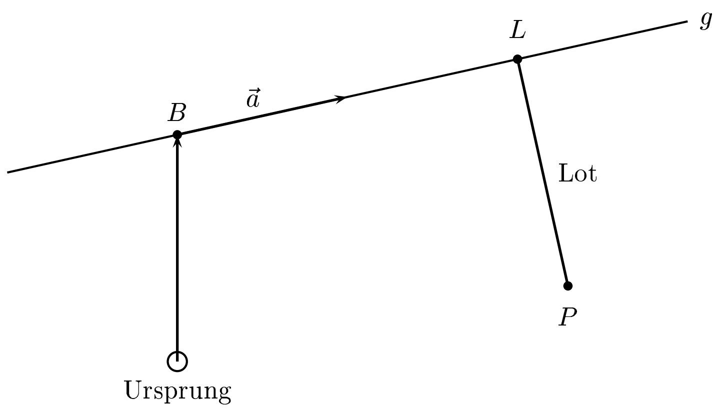


$\vec{a}_{\vec{b}}$ ist gleich der Länge der Projektion von $\vec{a}$ auf $\vec{b}$ multipliziert mit dem Einheitsvektor $\vec{b}_0$:

$$\vec{a}_{\vec{b}} = |\vec{a}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) \cdot \vec{b}_0 = \frac{\vec{a} * \vec{b}}{|\vec{b}|} \cdot \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a} * \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b} = \frac{4}{10}(1,0,3) = (0.4, 0, 1.2)\,.$$

Wie groß ist der Abstand $d(P, g)$ von $P(8, -1, 2)$ zur Geraden

$$g : \vec{x} = B \dot{+} \lambda \vec{a} = (1,1,1) \dot{+} \lambda(3, -2, 4)?$$



Für den Lotfußpunkt $L : (1,1,1) \dot{+} \lambda_L(3,-2,4)$ muß gelten: $\vec{a} * \overrightarrow{PL} = 0$, d.h. der Richtungsvektor $\vec{a}$ der Geraden muß senkrecht zu $\overrightarrow{PL}$ stehen. Ist aus dieser Bestimmungsgleichung λ_L errechnet, so kennt man L und damit $d(P,g) = |\overrightarrow{PL}|$.

$$\begin{aligned}
\vec{a} * \overrightarrow{PL} &= (3,-2,4) * (1 + 3\lambda_L - 8, 1 - 2\lambda_L + 1, 1 + 4\lambda_L - 2) \\
&= 9\lambda_L - 21 + 4\lambda_L - 4 + 16\lambda_L - 4 = 29\lambda_L - 29 = 0 \\
&\Longrightarrow \quad \lambda_L = 1 \quad \Longrightarrow \quad L = (4,-1,5) \\
d(P,g) &= |\overrightarrow{PL}| = |L - P| = |(-4,0,3)| = \sqrt{25} = 5.
\end{aligned}$$

4.8 Vektor- und Spatprodukt

Sind $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ und $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ Vektoren des $\mathbb{R}^3$, so heißt

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

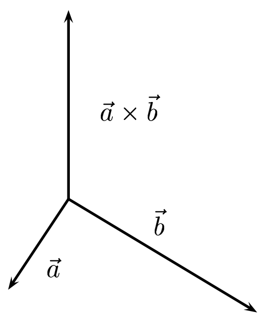
Vektorprodukt oder *Kreuzprodukt* von $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Das Vektorprodukt ist im Unterschied zum Skalarprodukt nur im $\mathbb{R}^3$ definiert.

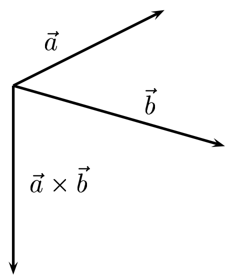
Das Vektorprodukt besitzt folgende Eigenschaften:

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
2. $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, falls $\vec{a} = \vec{0}$ oder $\vec{b} = \vec{0}$ oder $\vec{a}$ parallel zu $\vec{b}$.
3. $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$
4. $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$
5. $\vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht auf den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$
6. $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$

Der folgende Merksatz ebnet den Weg zu geometrischen Anwendungen:

> *Der Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht auf $\vec{a}$ und auf $\vec{b}$. Seine Länge ist gleich der Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms. Eine Rechtsschraube verschiebt sich in Richtung $\vec{a} \times \vec{b}$, wenn $\vec{a}$ über den kleineren Winkel auf $\vec{b}$ zugedreht wird.*





Beispiel:
Bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems sei $\vec{a} = (-1, 2, -3)$ und $\vec{b} = (2, 1, -2)$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = (-1, 2, -3) \times (2, 1, -2) = (-1, -8, -5).$$

Wir benutzen Eigenschaft 5. zur Durchführung einer Probe: Es muß

$$(\vec{a} \times \vec{b}) * \vec{a} = 0 = [(\vec{a} \times \vec{b}) * \vec{b}]$$

gelten: $(-1, -8, -5) * (-1, 2, -3) = 0$.
Man berechne einen zu

$$E : \vec{x} = P \dot{+} \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = (1, 0, 1) \dot{+} \lambda(-1, 2, 1) + \mu(2, 0, -1) \tag{12}$$

senkrechten Vektor $\vec{n}$ (*Normalenvektor zu* E) und beschreibe E als die Menge aller Punkte $X = (x_1, x_2, x_3)$ deren Verbindungsvektor $\overrightarrow{PX}$ senkrecht auf $\vec{n}$ steht.

$$\begin{aligned}
(13)\qquad \vec{n} &= \vec{a} \times \vec{b} = (-1, 2, 1) \times (2, 0, -1) = (-2, 1, -4) \\
(14)\qquad E &= \{X \in \mathbb{R}^3 \mid \overrightarrow{PX} * \vec{n} = 0\} = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid (\vec{x} - \vec{p}) * \vec{n} = 0\} \\
(15)\qquad &= \{X \in \mathbb{R}^3 \mid x_1n_1 + x_2n_2 + x_3n_3 = \vec{p} * \vec{n}\} \\
(16)\qquad &= \{X \in \mathbb{R}^3 \mid -2x_1 + x_2 - 4x_3 = -6\}\,.
\end{aligned}$$

(16) heißt *Koordinatendarstellung* von E im Unterschied zur Parameterdarstellung (12).

Die geometrische Interpretation des Skalarprodukts erlaubt die Berechnung des Abstandes $d(0, E)$ der Ebene E vom Ursprung. $\vec{n} * \vec{p}$ ist gleich der Länge von $\vec{n}$ multipliziert mit der Länge der Projektion von $\vec{p}$ auf $\vec{n}$. Also gilt — wegen $|n_0| = 1$ —

$$d(0, E) = \left|\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} * \vec{p}\right| = |\vec{n}_0 * \vec{p}|.$$

$$n_{01}x_1 + n_{02}x_2 + n_{03}x_3 \;=\; \vec{n}_0 * \vec{p}. \tag{17}$$

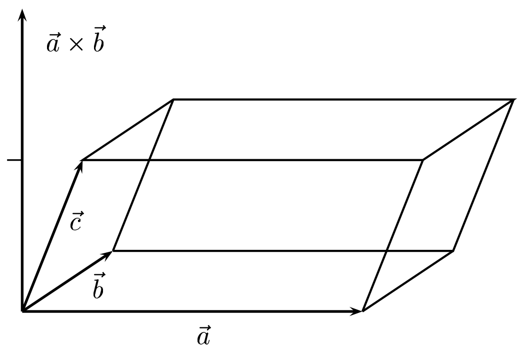
(17) heißt *Hessesche Normalform*.

$$\begin{aligned}
E:\quad \frac{-2}{\sqrt{21}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{21}}x_2 - \frac{4}{\sqrt{21}}x_3 &= -\frac{6}{\sqrt{21}} \\
d(0, E) &= \frac{6}{\sqrt{21}}.
\end{aligned}$$

$|\vec{a} \times \vec{b}|$ ist gleich dem Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms. Zusammen mit der geometrischen Interpretation des Skalarprodukts kann man den folgenden als *Spatprodukt* bezeichneten Ausdruck

$$(\vec{a} \times \vec{b}) * \vec{c}$$

anschaulich interpretieren. Er stellt eine Zahl dar, die gleich dem Produkt aus der Länge von $\vec{a} \times \vec{b}$ und der Länge der Projektion von $\vec{c}$ auf $\vec{a} \times \vec{b}$ ist. Haben die drei Vektoren eine Lage wie in der folgenden Skizze, so stellt $(\vec{a} \times \vec{b}) * \vec{c}$ das Volumen des von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannten Spates dar.



Zeigt $\vec{c}$ nach unten, so ist das Spatprodukt negativ, und es ist dem Betrage nach das Volumen des Spates. Mit der abkürzenden Schreibweise

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\,] := (\vec{a} \times \vec{b}) * \vec{c}$$

können wir einige Folgerungen kurz formulieren:

1. $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\,] = 0 \iff \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ liegen in einer Ebene (man sagt, sie sind linear abhängig).

2. $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\,] > 0 \iff \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bilden ein Rechtssystem.

3. Das Volumen des von den Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ gebildeten Tetraeters ist

$$V = \frac{1}{6}[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\,].$$

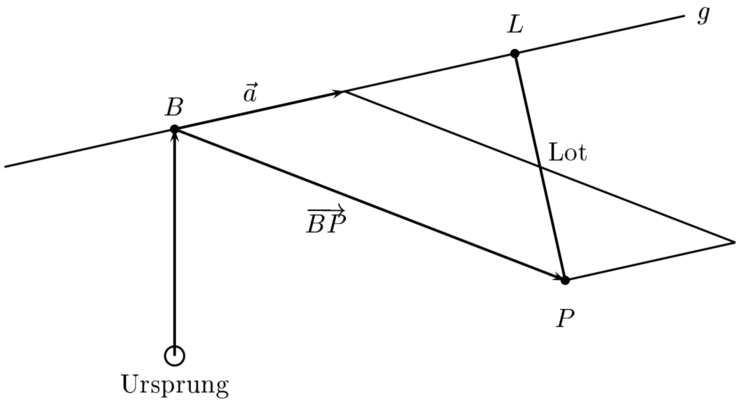
Beispiel:
Man berechne das Volumen V des von $\vec{a} = (1, 0, -1), \vec{b} = (2, -1, 1), \vec{c} = (1, 1, 2)$ aufgespannten Tetraeders.

$$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) * \vec{c}\,| = |(-1, -3, -1) * (1, 1, 2)| = |-6| = 6.$$

Somit hat das von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ gebildete Tetraeder das Volumen 1.

Wir wollen nun den Abstand $d(P, g)$ eines Punktes P von einer Geraden g mit Hilfe der geometrischen Interpretation des Vektorproduktes berechnen. Wir verwenden die bereits bekannte Aufgabenstellung:
Wie groß ist der Abstand $d(P, g)$ von $P(8, -1, 2)$ zur Geraden

$$g : \vec{x} = B \dot{+} \lambda\vec{a} = (1, 1, 1) \dot{+} \lambda(3, -2, 4)?$$



Die Vektoren $\overrightarrow{BP}$ und $\vec{a}$ spannen ein Parallelogramm auf. $d(P,g)$ ist die Höhe des Parallelogramms über der Seite $\vec{a}$. Diese Höhe erhält man auch als Quotient aus der Fläche des Parallelogramms und der Länge der Grundlinie:

$$d(P,g) = \frac{|\overrightarrow{BP} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}\,.$$

Man rechnet

$$|\overrightarrow{BP} \times \vec{a}| = |(-7,2,-1) \times (3,-2,4)| = |(6,25,8)| = \sqrt{725} \quad \text{und} \quad |\vec{c}| = \sqrt{29}.$$

Damit ergibt sich $d(P,g) = \frac{\sqrt{725}}{\sqrt{29}} = \sqrt{25} = 5$.

5 Die komplexen Zahlen

Die Tatsache, daß die Gleichung $x^2 - 2 = 0$ in $\mathbb{Q}$ keine Lösung hat, führte zur Einführung der reellen Zahlen. Aber auch der Körper der reellen Zahlen läßt noch manchen Wunsch offen. So gibt es etwa keine reelle Zahl, die Lösung der Gleichung $x^2 + 1 = 0$ ist.

Wir wollen im folgenden den Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen zu dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen erweitern, in dem die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ eine Lösung besitzt.

Es sei

$$\mathbb{C} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

die Menge der Paare reeller Zahlen. $\mathbb{C}$ zusammen mit den Verknüpfungen

$$\begin{aligned} (a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d) && \text{Addition} \\ (a, b) \cdot (c, d) &= (ac - bd, ad + bc) && \text{Multiplikation} \end{aligned}$$

heißt Körper der komplexen Zahlen. Man nennt a den Realteil und b den Imaginärteil von (a, b).

Eine Sonderrolle nehmen die Elemente $(1, 0)$ und $(0, 1)$ ein. Es gilt

$$\begin{aligned} (1, 0) \cdot (a, b) &= (1 \cdot a - 0 \cdot b, 1 \cdot b + 0 \cdot a) = (a, b) \\ (a, b) \cdot (1, 0) &= (a \cdot 1 - b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 1) = (a, b) \\ (0, 1) \cdot (a, b) &= (0 \cdot a - 1 \cdot b, 0 \cdot b + 1 \cdot a) = (-b, a) \\ (a, b) \cdot (0, 1) &= (a \cdot 0 - b \cdot 1, a \cdot 1 + b \cdot 0) = (-b, a) \end{aligned}$$

Insbesondere gilt $(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$.

Man kann $(a, b) \in \mathbb{C}$ auch als einen Vektor auffassen (Kapitel 4). Es ist dann

$$(a, b) = a \cdot (1, 0) + b \cdot (0, 1)\,,$$

wobei diese Darstellung eindeutig ist. Kürzt man nun ab: $1 = (1, 0)$ und $i = (0, 1)^\dagger$, so kann man jede komplexe Zahl $z = (a, b)$ eindeutig in der Form

$$z = (a, b) = a + bi$$

schreiben. Wegen $i^2 = -1$ lauten dann die Rechenregeln

$$\begin{aligned} (a + bi) + (c + di) &= (a + c) + (b + d)i \\ (a + bi) \cdot (c + di) &= ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i\,. \end{aligned}$$

Identifiziert man die komplexe Zahl $a + 0 \cdot i$ mit der reellen Zahl a, so sehen wir, daß man die reellen Zahlen als Teilmenge der komplexen Zahlen auffassen kann, $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

Wir wissen nun, wie man komplexe Zahlen addiert und multipliziert. Doch wie teilt man durch eine komplexe Zahl? Hierzu machen wir zunächst folgende

†In der Elektrotechnik schreibt man üblicherweise j statt i, um Verwechslungen mit der Stromstärke, die ebenfalls mit i abgekürzt wird, zu vermeiden. i heißt imaginäre Einheit.

Beobachtung
Sei $z = a + bi$ eine komplexe Zahl. Dann gilt

$$(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - abi + abi - b^2 i^2 = a^2 + b^2 + 0 \cdot i = a^2 + b^2 \,.$$

Das Ergebnis ist eine reelle Zahl!

Beispiel
Berechne $(3 + 4i) \cdot (3 - 4i)$.
Lösung: $(3 + 4i) \cdot (3 - 4i) = 3^2 - 12i + 12i - 4^2 i^2 = 25$.

Man nennt die komplexe Zahl $\overline{z} = a - bi$ konjugiert zu $z = a + bi$. Die reelle Zahl

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

heißt der Betrag von z.

Es gelten folgende

Regeln

1. $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z}_1 \pm \overline{z}_2$

2. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$.

Man teilt nun durch eine komplexe Zahl, indem man mit dem Konjugierten des Nenners erweitert:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi) \cdot (c - di)}{(c + di) \cdot (c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} \,,$$

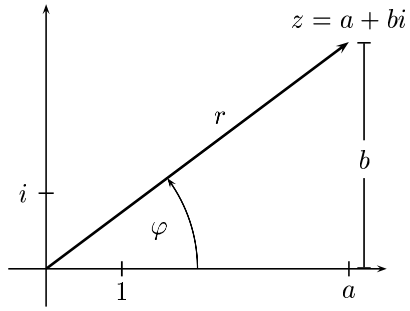
oder in anderer Schreibweise: sind $z, w \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen, so gilt

$$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \overline{w}}{w \cdot \overline{w}} \,.$$

Beispiel
Es sei $z = 3 + 4i$ und $w = 5 + 6i$. Berechne $\frac{z}{w}$.
Lösung:

$$\frac{3 + 4i}{5 + 6i} = \frac{(3 + 4i) \cdot (5 - 6i)}{(5 + 6i) \cdot (5 - 6i)} = \frac{(3 \cdot 5 + 4 \cdot 6) + (4 \cdot 5 - 3 \cdot 6)i}{5^2 + 6^2} = \frac{39 + 2i}{61} = \frac{39}{61} + \frac{2}{61}\, i \,.$$

Geometrische Darstellung komplexer Zahlen
Die Definition komplexer Zahlen als Paare reeller Zahlen legt es nahe, sie mit Punkten der Ebene zu identifizieren. Man spricht dann von komplexer oder Gaußscher Zahlenebene.



Jede komplexe Zahl $z \neq 0$ besitzt eine eindeutige Darstellung

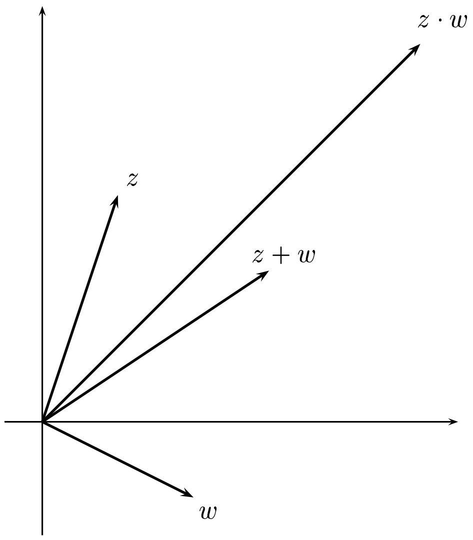
$$z = r \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

mit $r = |z|$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$. Man nennt φ das Argument von z, geschrieben

$$\varphi = \arg z\,.$$

Man erhält hiermit eine geometrische Interpretation der Addition und Multiplikation in $\mathbb{C}$:

- Die Summe zweier komplexer Zahlen erhält man durch Addition der entsprechenden Vektoren (Parallelogrammkonstruktion).
- Der Betrag des Produktes zweier komplexer Zahlen ist gleich dem Produkt ihrer Beträge.
- Das Argument des Produktes zweier komplexer Zahlen ergibt sich aus der Summe ihrer Argumente. Ist die Summe größer als 360° ($= 2\pi$), so muß man anschließend noch reduzieren.



Wie wir nun wissen, besitzt die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ wegen $i^2 = -1$ eine Lösung in $\mathbb{C}$. Man kann sich nun die Frage stellen, ob es nicht-konstante Polynome gibt, die keine Nullstelle in $\mathbb{C}$ besitzen. Auskunft hierüber gibt uns der Hauptsatz der Algebra:

Hauptsatz der Algebra

In $\mathbb{C}$ besitzt jedes Polynom $P(z)$ vom Grad $n \geq 1$ genau n Nullstellen, wenn man jede Nullstelle entsprechend ihrer Vielfachheit zählt.
Sind alle Koeffizienten von $P(z)$ reell, so ist mit z auch $\overline{z}$ eine Nullstelle von $P(z)$.
Man sagt, der Körper der komplexen Zahlen ist algebraisch abgeschlossen.

Eine wichtige Folgerung aus dem Haupsatz der Algebra ist der folgende

Satz

Jedes Polynom $P(x)$ mit reellen Koeffizienten von ungeradem Grad n besitzt mindestens eine reelle Nullstelle.

Beweis

Nach dem Hauptsatz der Algebra besitzt $P(x)$ genau n Nullstellen in $\mathbb{C}$. Weil die Koeffizienten von $P(x)$ alle reell sind, treten die komplexen Nullstellen immer paarweise auf. Also besitzt $P(x)$ höchstens eine gerade Anzahl von nicht-reellen Nullstellen.

6 Abbildungen, Funktionen

Unter einer *Abbildung* oder *Funktion* f einer Menge D in eine Menge W versteht man eine Zuordnungsvorschrift, die jedem Element aus D genau ein als *Bild* dieses Elements bezeichnetes Element aus W zuordnet. Man schreibt $f \mid D \to W$ (oder elementweise $x \mapsto f(x)$, $x \in D$) und nennt die Ausgangsmenge D den *Definitionsbereich* oder die *Urbildmenge* oder die *Menge der Argumente*. Die Menge W, aus der die Bilder stammen, heißt *Wertebereich*, die Menge der Bilder bezeichnet man als *Bildmenge* $f(D)$.

Zwei Abbildungen $f \mid A \to B$ und $g \mid C \to D$ sind genau dann gleich, in Zeichen $f = g$, wenn gilt $A = C$ und $B = D$ und $f(x) = g(x)$ für alle $x \in A$.

Beispiele:

1. $D = \{-1, -2, -3, -4, -5\}$ $W = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots 24, 25\}$
   $f(-1) = 1, \quad f(-2) = 4, \quad f(-3) = 9, \quad f(-4) = 16, \quad f(-5) = 25$

2. $D = \{-1, -2, -3, -4, -5\}$ $W = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
   $g(-1) = 1, \quad g(-2) = 2, \quad g(-3) = 3, \quad g(-4) = 4, \quad g(-5) = 5$

3. $h \mid \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$

4. $y \mid \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad y(x) = \begin{cases} -1 & : \ x < 0 \\ \ \ 0 & : \ x = 0\,, \\ +1 & : \ x > 0 \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}$

Man kann eine Abbildung auf jede Weise angeben, die Zuordnungsvorschrift, Definitions- und Wertebereich ersichtlich macht. Wie das vierte Beispiel zeigt, muß es sich dabei nicht für alle Elemente des Definitionsbereichs um dieselbe Zuordnungsvorschrift handeln. In den ersten beiden Beispielen ist die Zuordnung durch Angabe von Bild und Urbild vorgenommen, man hätte f auch durch die Vorschrift $f(x) = x^2$ und g durch $g(x) = |x|$ angeben können.

Ändert man im dritten Beispiel den Wertebereich von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}^+$, so wird hierdurch eine andere Abbildung beschrieben.

Eine Abbildung $f \mid D \to W$ heißt *injektiv*, wenn zu verschiedenen Argumenten stets verschiedene Bilder gehören: (d.h. $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$). Im Fall $f(D) = W$ sagt man, f ist eine Abbildung von D *auf* W oder f ist *surjektiv*. Ist die Abbildung $f \mid D \to W$ sowohl surjektiv als auch injektiv, so nennt man sie *bijektiv*. Eine bijektive Abbildung kann es also nur zwischen Mengen mit gleich vielen Elementen geben, und in diesem Fall existiert die mit $f^{-1} \mid W \to D$ bezeichnete *Umkehrabbildung*, die jedem $w \in W$ das durch $w = f(d)$ eindeutig bestimmte $d \in D$ zuordnet.

In den obigen Beispielen sind die Abbildungen f, g und h injektiv, g ist surjektiv, und y besitzt keine dieser Eigenschaften. Damit ist g die einzige bijektive Abbildung unter den Beispielen und besitzt daher eine Umkehrabbildung: $g^{-1} \mid W \to D$, $g^{-1}(x) = -x$.

Graphische Darstellung

Unter einer graphischen Darstellung einer Funktion versteht man jede Graphik, aus der hervorgeht, welches der Definitionsbereich, der Wertebereich und die Zuordnungsvorschrift ist.

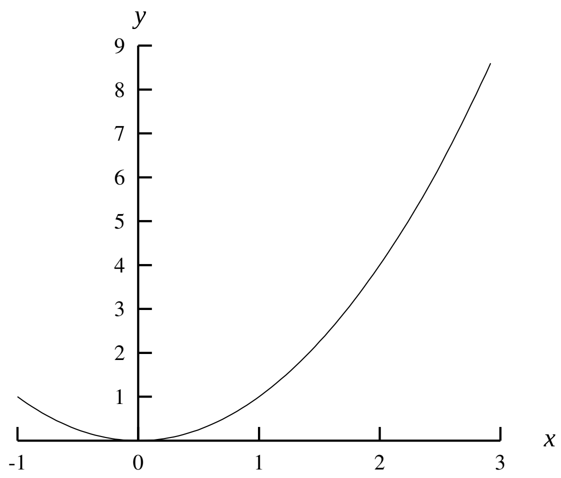
Beispiel:

Der Definitonsbereich ist $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 3\}$, der Wertebereich $W = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 9\}$, die Paare $(x, f(x))$ kann man aus der graphischen Darstellung (kurz: *Graph*) ablesen.

Jedoch lassen sich nicht alle Funktionen graphisch darstellen.
Beispiel: $D = \mathbb{R}$

$$y = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \text{ rational} \\ 1 & \text{falls } x \text{ irrational} \end{cases}$$

ist nicht graphisch darstellbar.



Intervalle

Besonders wichtige Mengen für Definitions- und Wertebereiche von Funktionen sind Intervalle.

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Die Menge

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

heißt *abgeschlossenes Intervall* mit den Randpunkten a und b. Sind die Randpunkte nicht enthalten, so heißt $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ *offenes Intervall.* Analog sind die *halboffenen* Intervalle $(a, b]$ und $[a, b)$ definiert. Das offene Intervall $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ mit $\epsilon > 0$ heißt ε-*Umgebung* des Punktes $a \in \mathbb{R}$.

Formen von Zuordnungsvorschriften

Die Zuordnungsvorschrift für eine Funktion kann auf verschiedene Weisen angegeben werden. Gibt man sie in Form von geordneten Paaren $(x, f(x))$ an, so würde es genügen, alle diese Paare der Reihe nach aufzuzählen. Diese Methode ist aber selten anwendbar. Ist der Definitionsbereich z.B. ein nichtleeres offenes Intervall $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$, so gibt es unendlich viele solcher Paare.

Explizite Form: Die Funktionsvorschrift ist in der Form $y = f(x)$ formuliert. Diese Schreibweise ist eine Kurzform für

$$f = \{(x, y) \mid y = f(x) \text{ und } x \in D \text{ und } y \in W\}$$

dabei gehen in der Regel D und W aus dem Zusammenhang hervor.
Beispiel: $y = x^2 + \sqrt{x}$, $x \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$.

Implizite Form: Im Gegensatz zur expliziten Form tauchen die Bild und Urbild bezeichnenden Variablen, etwa y und x auf mindestens einer Seite der Funktion gemeinsam auf.
Beispiele:

Man betrachte die Gleichung $2x^2+3y=0$, $x, y \in \mathbb{R}$. Auflösen nach y ergibt $y=-2x^2/3$, also die Gleichung einer Funktion $g \mid \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g(x)=-2x^2/3$. g ist durch die Gleichung $2x^2+3y=0$ *implizit* gegeben.

Die Gleichung $x^2-y^2+1=0$, $x, y \in \mathbb{R}$, liefert $y=\sqrt{x^2+1}$ und $y=-\sqrt{x^2+1}$, also keine Funktion, da die daraus resultierende Zuordnungsvorschrift nicht eindeutig ist. Schließlich ist eine Auflösung von $x^2+y^2+1=0$ nach y nicht sinnvoll, da es kein reelles Zahlenpaar gibt, das diese Gleichung erfüllt.

Parameterdarstellung: Hierbei handelt es sich um zwei Funktionsgleichungen

$$x=f_1(t) \qquad \text{und} \qquad y=f_2(t), \qquad\qquad t \in D$$

mit je einem Wertebereich W_1 und W_2. Für $t_0 \in D$ erhält man einen Punkt (Element)

$$(f_1(t_0), f_2(t_0)) \in W_1 \times W_2.$$

Beispiel:

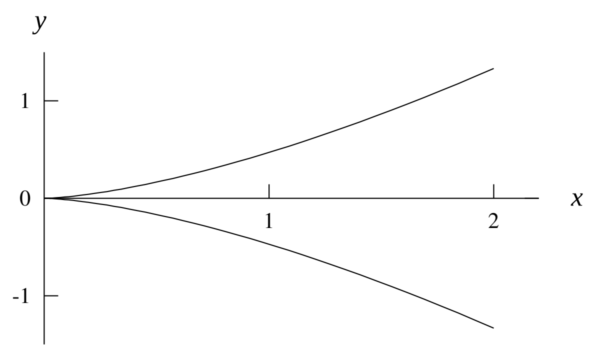
$$x=\frac{1}{2}t^2,\ y=\frac{1}{6}t^3,\ t \in \mathbb{R}.$$

Eine Wertetabelle kann man leicht berechnen:

t	-2	-1	0	1	2
(x,y)	$(2,-\frac{4}{3})$	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{6})$	$(0,0)$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{6})$	$(2,-\frac{4}{3})$

Oft kann man eine Parameterdarstellung durch Eliminierung des Parameters auf eine explizite Form umschreiben. In diesem Beispiel ergibt dieses allerdings nur die implizite Form $y^2=(2/9)x^3$, die sich wegen der Mehrdeutigkeit des Wurzelziehens nicht in eine explizite Form umschreiben läßt.

Die Parameterdarstellung der Neilschen Parabel ist eine Abbildung von $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$.



Neilsche Parabel $y^2=(2/9)x^3$

6.1 Besondere Funktionstypen

Gerade und ungerade Funktionen

Eine Funktion f heißt *gerade*, wenn $f(-x)=f(x)$ für alle $x \in D$ gilt, sie heißt *ungerade*, wenn $f(-x)=-f(x)$ für alle $x \in D$ gilt.

Beispiele:

Gerade Funktionen: $D=\mathbb{R}$

a) $y=-\frac{1}{2}x^2$; denn $y(-x)=-\frac{1}{2}(-x)^2=-\frac{1}{2}(+x)^2=y(x)$

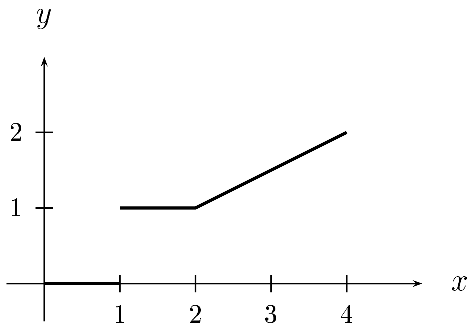
b) $y = |x|$; denn $y(-x) = |-x| = |x| = y(x)$
Ungerade Funktionen:
a) $y = x^{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$; denn $y(-x) = (-x)^{2n+1} = (-1)^{2n+1}x^{2n+1} = -x^{2n+1} = -y(x)$
b) $y = \frac{1}{x}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; denn $y(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -y(x)$.

Der Graph einer geraden Funktion ist symmetrisch zur y-Achse. Eine ungerade Funktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

Monotone Funktionen

Sei $f \mid I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$. Gilt für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$: $f(x_1) \leq f(x_2)$, so heißt f auf I *monoton wachsend.* Gilt sogar $f(x_1) < f(x_2)$, so heißt f auf I *streng monoton wachsend.* Gilt $f(x_1) \geq f(x_2)$ bzw. $f(x_1) > f(x_2)$, so heißt f auf I *monoton* bzw. *streng monoton fallend.*

Beispiel:



$$y = \begin{cases} 0 & : \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & : \quad 1 \leq x < 2 \\ \frac{1}{2}x & : \quad 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Die Funktion ist auf $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 4\}$ monoton wachsend, auf dem Intervall $[2, 4]$ sogar streng monoton.

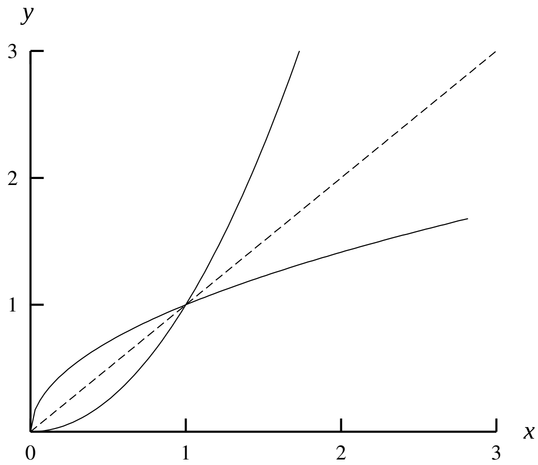
Umkehrbare Funktionen

Gegeben sei eine injektive Funktion $f \mid D \to W$. Dann ist jedes Element $y \in f(D)$ Bild von genau einem Element $x \in D$. Man kann also eine neue Funktion definieren, die jedem $y \in f(D)$ als Bild gerade das $x \in D$ zuordnet, das Urbild von y ist. Diese Funktion leistet dann das Umgekehrte wie f: ihr Definitionsbereich ist $f(D)$, ihre Bildemenge ist D. Man nennt sie daher die *Umkehrfunktion* f^{-1} von f.

Versteht man unter der Schreibweise $h(g(x))$: wende auf x die Funktionsvorschrift g und dann auf $g(x)$ die Vorschrift h an , so gilt $f^{-1}(f(x)) = x$ und $f(f^{-1}(x)) = x$.

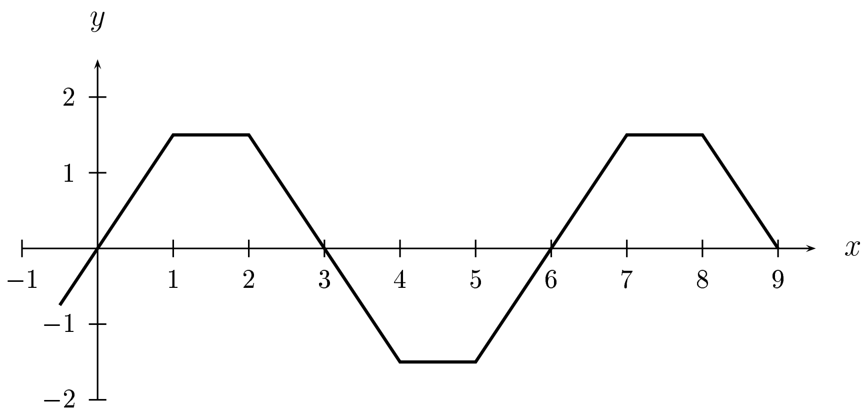
Verfahren zum Auffinden der Umkehrfunktion

Ist die Funktion umkehrbar, so kann man die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion rechnerisch bestimmen.
Beispiel: $f \mid \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}; \quad f(x) = x^2$
Die Funktion f ist umkehrbar. Man löst $f(x) = x^2$ nach x auf:$x = +\sqrt{f}(x)$ und vertauscht x mit $f(x)$: $f(x) = +\sqrt{x}$.



Periodische Funktionen

Wenn es zu einer reellen Funktion $f \mid D \to \mathbb{R}$ eine reelle Zahl $p > 0$ gibt, so daß für alle $x \in D$ gilt: $f(x) = f(x + p)$, so heißt die Funktion *periodisch* und p eine *Periode* von f. Gibt es zu einer reellen Funktion eine kleinste positive reelle Zahl p, die die Bedingung $f(x) = f(x + p)$ für alle $x \in D$ erfüllt, so wird p die *primitive Periode* der Funktion f genannt.



Funktion mit der primitiven Periode 6

7 Graphische Lösung von Gleichungen und Ungleichungen

Die Lösung von Gleichungen und Ungleichungen, wie z.B. von

$$x^5 - 2x^3 - \sqrt{3}\,x = \frac{22}{7}$$

oder von

$$\begin{aligned} x + y^3\sqrt{x} &\leq 1 \\ 2x + e^y &> y \end{aligned}$$

bringt oftmals erhebliche Schwierigkeiten mit sich (für viele Gleichungen und Ungleichungen existieren ohnehin nur näherungsweise Lösungsverfahren). Ohne größeren Aufwand lassen sich jedoch viele Gleichungen und Ungleichungen – wenigstens näherungsweise – *graphisch* lösen.

7.1 Gleichungen einer Veränderlichen

7.1.1 1. Methode

Die Gleichung wird so umgeformt, daß auf einer Seite nur die Null steht. Die andere Seite wird als Funktion $f(x)$ aufgefaßt und graphisch dargestellt. Man erhält dann alle Lösungen der Gleichung durch Ermitteln der x-Werte der *Schnittpunkte* (oder *Berührpunkte*) der Kurve $y = f(x)$ mit der x-Achse. Diese x-Werte heißen auch *Nullstellen* der Funktion $f(x)$.

Beispiele:

1. Zu lösen ist

   $$x + \sqrt{x} + 1 = 5.$$

   Umformung zu

   $$f(x) = x + \sqrt{x} - 4 = 0.$$

   Definitionsbereich D von $f(x)$:

   $$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}.$$

   Wertetabelle:

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	-4	-2	$\sqrt{2}-2$	$\sqrt{3}-1$	2

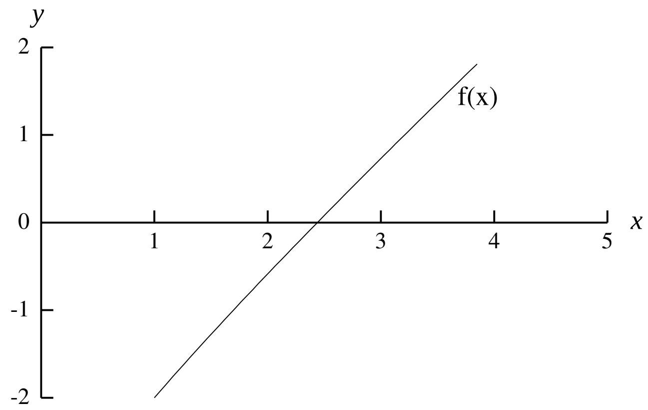


Abbildung 1: Graphisches Ermitteln einer Nullstelle

Es gibt also genau eine Lösung der vorgelegten Gleichung, die bei $x \approx 2.4$ liegt.

2. Zu lösen ist

$$-4x = -4 - x^2.$$

Umformung zu

$$x^2 - 4x + 4 = 0.$$

Definitionsbereich D von $f(x) = x^2 - 4x + 4$:

$$D = \mathbb{R}.$$

Wertetabelle:

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	16	9	4	1	0	1	4

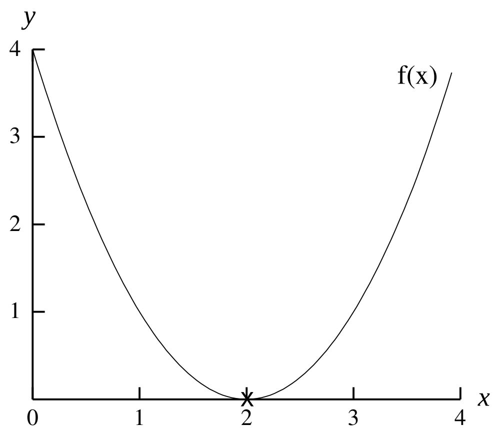


Abbildung 2: Graphisches Ermitteln einer doppelten Nullstelle

Es gibt genau eine Lösung der Gleichung, $x = 2$.

Beachte: Ist die x-Achse waagerechte Tangente an die Funktionskurve $f(x)$, so ist die Berührstelle *mehrfache Nullstelle* oder *Nullstelle höherer Ordnung.*

Löst man nämlich im 2. Beispiel $x^2 - 4x + 4 = 0$ nach dem üblichen Lösungsverfahren für quadratische Gleichungen, so findet man $x_{1,2} = +2 \pm \sqrt{4-4}$, d. h. $x_1 = x_2 = 2$. Die 2 tritt also als mehrfache – hier: doppelte – Nullstelle von $x^2 - 4x + 4$ auf.

7.1.2 2. Methode

Die Aufstellung einer Wertetabelle für $f(x)$ ist oftmals zeitraubend. Sie läßt sich jedoch in manchen Fällen vermeiden: Die gegebene Gleichung wird dann so (äquivalent) umgeformt, daß links und rechts Ausdrücke in x stehen, die – als Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ aufgefaßt – eine einfache graphische Darstellung ohne langwieriges Aufstellen einer Wertetabelle gestatten. Die Lösungen der Gleichung sind dann die x-Werte der Schnittpunkte (bzw. Berührpunkte) der Kurven $f(x)$ und $g(x)$. Bei Berührpunkten bzw. bei Schnitt der Kurven mit gleichen Tangenten liegen wieder mehrfache Lösungen vor.

Beispiele:

1.
$$-4x = -4 - x^2$$
ist zu lösen (s.o.). Umformung zu
$$x^2 = 4x - 4,$$
d.h. $f(x) = x^2$ (Normalparabel) und $g(x) = 4x - 4$ (Gerade durch $(0, -4)$ und $(1, 0)$).

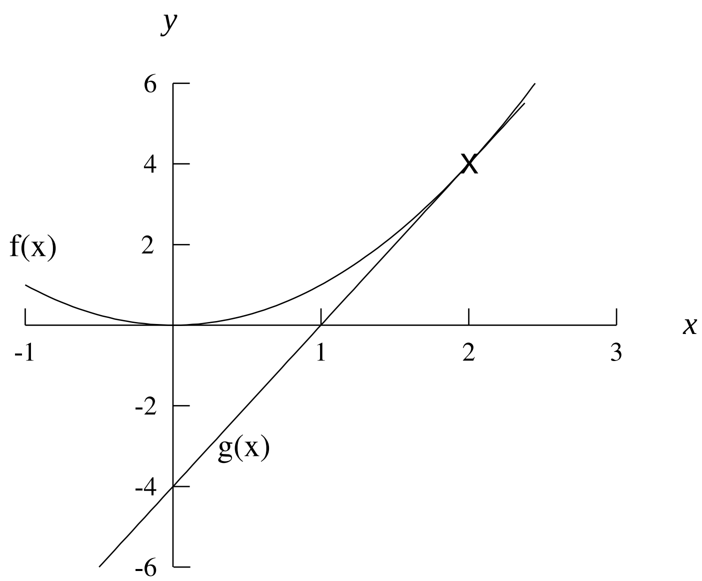


Abbildung 3: Lösungsermittlung als Schnitt zweier Graphen, doppelte Lösung

Die Gleichung hat genau eine (mehrfache) Lösung, $x = 2$.

2.

$$xe^x = 1 + x$$

ist zu lösen. Umformung zu

$$e^x = \frac{1}{x} + 1 \qquad \text{(für } x \neq 0\text{)}.$$

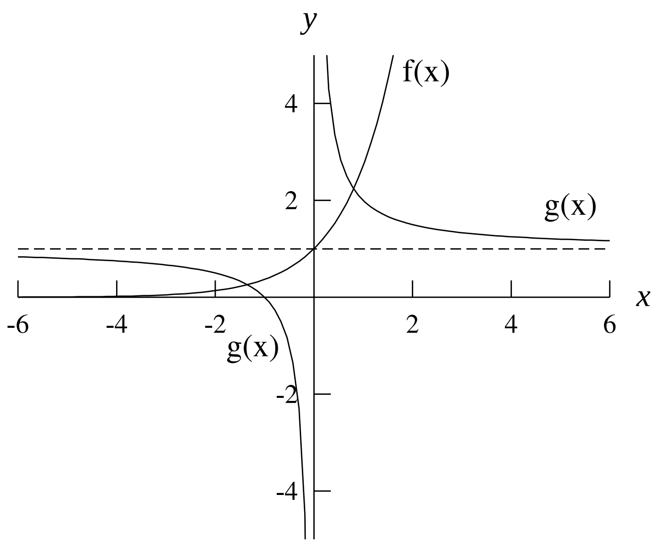


Abbildung 4: Lösungsermittlung als Schnitt zweier Graphen, 2 Lösungen

Die Gleichung hat genau zwei Lösungen, $x_1 \approx -1.2$; $x_2 \approx +0.7$.

7.2 Ungleichungen mit einer Veränderlichen

Methode:
Die Ungleichung wird zunächst auf die Form $f(x) \square 0$ gebracht, wobei für „$\square$“ eines der Zeichen $\leq$, $<$, $\geq$, $>$ steht. $f(x)$ wird graphisch dargestellt. Lösungen der Ungleichung sind alle die Werte der x-Achse, deren zugehörige y-Werte oberhalb (für $\square = \geq$ oder $>$) bzw. unterhalb (für $\square = \leq$ oder $<$) liegen. Für $\square = \leq$ bzw. $\geq$ kommen noch die Schnittpunkte von $f(x)$ mit der x-Achse als Lösungen hinzu. Bei den Lösungsmengen von Ungleichungen einer Veränderlichen handelt es sich also i.a. um Intervalle (abgeschlossen oder offen) der Zahlengeraden.

Beispiele:

1. Zu lösen ist die Ungleichung
$$x^3 + 2x \leq 3x^2.$$
Umformung zu
$$f(x) = x^3 + 2x - 3x^2 \leq 0.$$
Wertetabelle für $y = f(x)$:

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$+\frac{1}{2}$	1	$+\frac{3}{2}$	2	3
$f(x)$	-6	$-\frac{15}{8}$	0	$+\frac{3}{8}$	0	$-\frac{3}{8}$	0	6

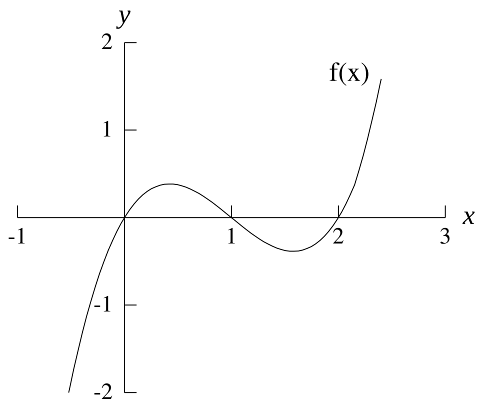


Abbildung 5: $f(x) \leq 0$ für $x \in (-\infty, 0]$ oder $x \in [1, 2]$

2. Zu lösen ist die Ungleichung
$$-4x < -4 - x^2.$$
Umformung liefert:
$$f(x) = x^2 - 4x + 4 < 0$$

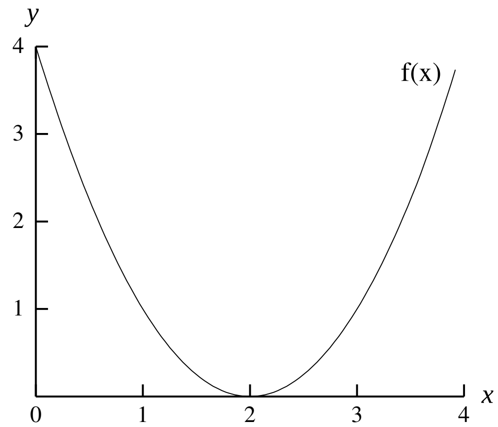


Abbildung 6: Die Forderung: $f(x) < 0$ ergibt eine leere Lösungsmenge

7.3 Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten

Beispiel:
Suche (näherungsweise) die Lösung des Gleichungssystems

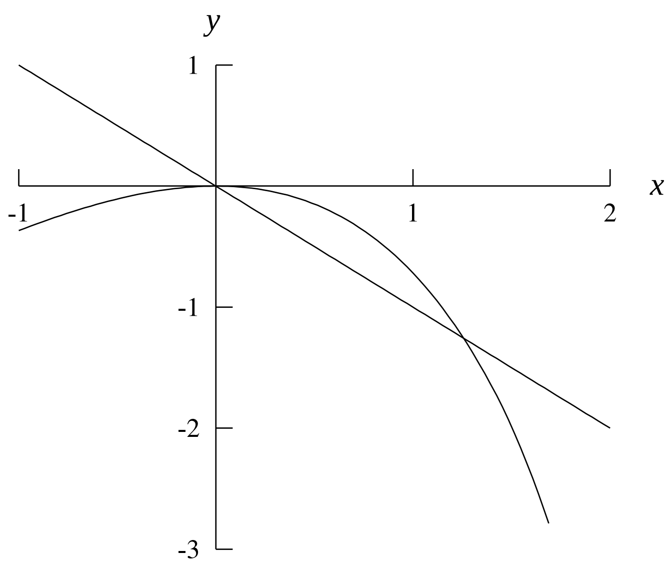
(1) $$x + y = 0$$
(2) $$e^x + y = x + 1.$$

Methode:
Man formt die beiden Gleichungen äquivalent um und stellt diese – falls möglich – graphisch dar. Die Schnitt- bzw. Berührungspunkte der Funktionskurven sind dann die Lösungen des Gleichungssystems.

$$\begin{array}{rcl} x + y &=& 0 \\ e^x + y &=& x + 1 \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{rcl} y &=& -x \\ y &=& x + 1 - e^x \end{array}$$

Wertetabelle für $y = x + 1 - e^x$:

x	-2	-1	0	1	2
y	$-1 - \frac{1}{e^2}$	$-\frac{1}{e}$	0	$2 - e$	$3 - e^2$



Das Gleichungssystem hat zwei Lösungen, den Punkt $x = 0,\ y = 0$ und den Punkt $x \approx 1.25,\ y \approx -1.25$.

7.4 Ungleichungssysteme mit zwei Unbekannten

Beispiel:

Suche (näherungsweise) die Lösung des Ungleichungssystems

$$
\begin{array}{lrcl}
(1) & x^2 + y^2 & \leq & 1 \\
(2) & y & > & x^2 \\
(3) & x & < & \frac{1}{2}\,y
\end{array}
$$

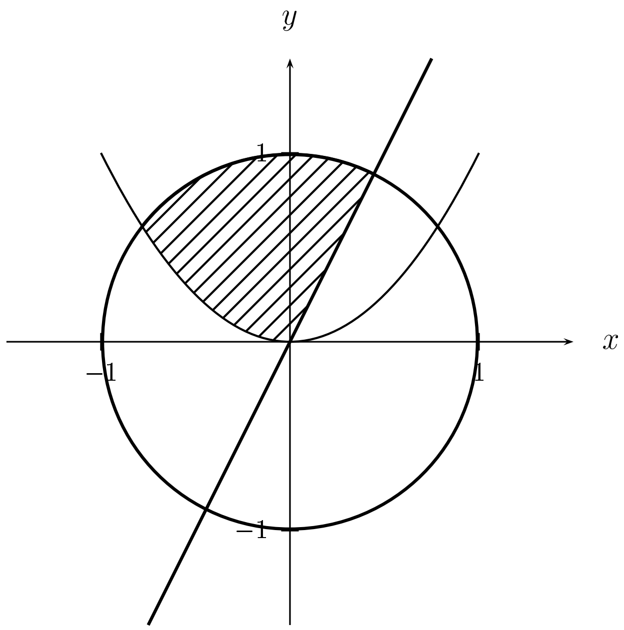
Methode:

Man schreibt die Ungleichungen des Systems zunächst formal zu Gleichungen um und verfährt wie in 7.3 beschrieben. Die Zeichenebene wird dann durch jeden Graphen in zwei *Gebiete* zerlegt (wobei wir voraussetzen, daß die Funktionen stetig sind, also in ihren graphischen Darstellungen keine Lücken, Sprungstellen o.ä. auftreten). Jeweils eines der beiden Gebiete genügt dann der Ungleichung.‡ Der mengentheoretische Durchschnitt dieser den Ungleichungen genügenden Gebiete bildet die Lösungsmenge des Ungleichungssystems.

Beispiel: (siehe oben)

$$
\begin{array}{lrcl}
(1) & x^2 + y^2 & \leq & 1 \\
(2) & y & > & x^2 \\
(3) & x & < & \frac{1}{2}\,y
\end{array}
$$

‡Zum Beispiel zerlegt die Kurve $x^2 + y^2 = 1$ die Ebene in das Innere und das Äußere des „Einheitskreises“ (Kreis mit Radius 1 um den Ursprung). Das Innere ist Lösung der Ungleichung $x^2 + y^2 < 1$, da durch $x^2 + y^2 = r^2$ gerade alle Kreise mit dem Radius 0 bis 1 (ausschließlich) um den Ursprung dargestellt werden, wenn r die reellen Zahlen von 0 bis 1 (ausschließlich) durchläuft.



Zur Lösungsmenge gehören alle Punkte, die innerhalb des Kreises (einschl. Rand) <u>und</u> innerhalb der Parabel (ausschl. Rand) <u>und</u> links von der Geraden $y = 2x$ (ausschl. Rand) liegen. Ein Element dieser Menge ist der Punkt $P(0, 0.5)$.

8 Folgen, Reihen, Grenzwerte

8.1 Zahlenfolgen

Ordnet man jeder natürlichen Zahl n genau eine reelle Zahl a_n zu, so erhält man eine (reelle, unendliche) *Zahlenfolge* $a_1, a_2, a_3, \ldots$, abgekürzt (a_n). Der sogenannte „*Index*“ n gibt dabei an, das wievielte Glied der Zahlenfolge die Zahl a_n ist.

Man untersucht meist nur solche Folgen, denen ein bestimmtes *Bildungsgesetz* zugrundeliegt. Die Folge wird dann oft so angegeben, daß man das Bildungsgesetz hinschreibt. So wird zum Beispiel die Folge

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16} \ldots$$

durch das Bildungsgesetz

$$a_n = \frac{1}{n^2}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

beschrieben.

Manchmal gibt man Zahlenfolgen aber auch *rekursiv* an, d.h. durch eine Verbindungsgleichung zweier oder mehrerer aufeinanderfolgender Glieder einschließlich der Angabe des oder der Anfangsglieder.

Beispiele:

1. Mit $a_{n+1} = 2a_n \quad (n \in \mathbb{N}),\ a_1 = 1$ ist die Folge (a_n) der Gestalt $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$ gemeint; ihr Bildungsgesetz lautet also $a_n = 2^{n-1}$.

2. $a_{n+1} = 2a_n \quad (n \in \mathbb{N}),\ a_1 = 0\ :\ (a_n)$ hat die Gestalt $0, 0, 0, \ldots$;
   Bildungsgesetz: $a_n = 0$.

3. $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n \quad (n \in \mathbb{N}),\ a_2 = 1,\ a_1 = 0\ :\ (a_n)$ hat folgende Gestalt:

   $$0, 1, 1, 0, -1, -1, 0, 1, 1, 0, -1, -1, 0, \ldots.$$

   Hier ist die Angabe des Bildungsgesetzes für a_n in der vorliegenden rekursiven Form einfacher als in Form einer direkten Vorschrift.

Haben in einer Folge je zwei aufeinanderfolgende Glieder stets dieselbe konstante Differenz d, so heißt die Folge *arithmetische Folge*. Ist $d > 0$, so spricht man von einer steigenden Folge; ist $d < 0$, von einer fallenden Folge und für $d = 0$ von einer konstanten Folge.

Beispiele:

1. Gegeben sei die Folge (a_n) mit $a_n = n^2$. Die Differenzenfolge (b_n) je zweier aufeinanderfolgender Glieder von (a_n) ist arithmetisch mit $d = 2$:
   $b_n = a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$;
   $b_{n+1} - b_n = 2\ (n+1) + 1 - (2n+1) = 2 = d$.

2. Gegeben sei das Anfangsglied $a_1 = 2$ einer arithmetischen Folge mit $d = -0.3$. Berechne das 100-ste Glied der Folge. Bei arithmetischen Folgen gilt allgemein

$$a_1 = a_1,\ a_2 = a_1 + d,\ a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d,\ \ldots$$

und

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

als n-tes Glied der Folge $(a_n),\ n \in \mathbb{N},\ d =$ konst. Also ist hier

$$a_{100} = 2 + 99 \cdot (-0.3) = 2 - 29.7 = -27.7.$$

Haben in einer Folge je zwei aufeinanderfolgende Glieder stets denselben, also konstanten Quotienten $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, so heißt die Folge *geometrische Folge*. Ist $q < 0$, so ist die Folge alternierend, d.h. aufeinanderfolgende Glieder haben stets verschiedene Vorzeichen. Ist $q > 0$, so haben alle Glieder dasselbe Vorzeichen wie das erste Glied der Folge, a_1. Ist $|q| > 1$, so steigen die Beträge der Glieder mit wachsendem Index n; im Falle $|q| < 1$ sinken sie. Ist $q = 1$, so ist die Folge konstant; ist $q = -1$, so alternierend konstant.

Beispiele:

1. Gegeben sei ein hinreichend großes Stück Papier der Dicke $d_1 = 0.1$ mm. Wie dick ist das Papier, nachdem man es 40 mal gefaltet hat? – Nach jeder Faltung ist das Papier doppelt so dick wie vorher. Die jeweilige Papierdicke ist daher eine geometrische Folge mit $q = +2$ und dem Anfangsglied d_1. Allgemein gilt bei geometrischen Folgen:

$$a_1 = a_1,\ a_2 = a_1 q,\ a_3 = a_2 q = a_1 q^2,\ \ldots$$

und

$$a_n = a_1\ q^{n-1}$$

als n-tes Glied der Folge $(a_n),\ n \in \mathbb{N},\ q =$ konst. Hier ist also d_{41} zu berechnen (da $d_1 :=$ Dicke des ungefalteten Papiers).
$d_{41} = d_1 \cdot q^{40} = 0.1 \cdot 2^{40}$ mm $= 109\,951.162776$ km.

2. Zwischen je zwei Glieder der geometrischen Folge

$$32, 1, \frac{1}{32}, \frac{1}{1024}, \ldots \qquad \left(q = \frac{1}{32},\ a_1 = 32\right)$$

sollen je vier Glieder so interpoliert werden, daß wieder eine geometrische Folge entsteht.

Gegeben sei ein Glied a_k der alten Folge. Sei a_k das m-te Glied der neuen Folge, d.h. $a_k = b_m$; dann ist $a_{k+1} = b_{m+5}$, da ja vier neue Glieder $(b_{m+1}, \ldots, b_{m+4})$ eingeschaltet werden sollen. Der Quotient q' der neuen Folge (b_m), die wiederum geometrisch sein sollte, ist $q' = \frac{b_{m+1}}{b_m}$. Wegen

$$b_{m+5} = b_m\ q'^5 \qquad \text{und} \qquad \frac{b_{m+5}}{b_m} = \frac{a_{k+1}}{a_k} = q = q'^5$$

ist

$$q' = \sqrt[5]{q} = \sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}\,.$$

(b_m) hat also die Gestalt $32, 16, 8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots$.

8.2 Grenzwerte bei Folgen

Betrachtet man die Folge (a_n) mit $a_n = \frac{1}{n}$, so werden die Zahlen a_n mit wachsendem n immer kleiner; sie nähern sich der Zahl Null. Man sagt, „die Folge hat den Grenzwert Null“. Genauer definiert man

> Die Folge (a_n) hat den *Grenzwert* a (abgekürzt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$), wenn der Abstand $|a_n - a|$ eines Gliedes a_n von a und der aller darauffolgenen Glieder von a beliebig klein gemacht werden kann, falls man nur n hinreichend groß wählt.

Z.B. kann bei der obigen Folge ($a_n = \frac{1}{n}$) der Abstand aller Glieder kleiner als 0.001 gemacht werden, wenn man nur n groß genug, nämlich größer als 1000, wählt. Denn $|a_{1001} - 0| = a_{1001} = 1001^{-1} < 0.001$, und der Abstand aller auf a_{1001} folgenden Glieder von Null ist noch kleiner. Statt 0.001 kann man offenbar jede beliebige positive Zahl wählen, n muß nur ggf. größer gewählt werden. Also ist $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Eine Folge kann stets höchstens einen Grenzwert haben. Sie heißt dann *konvergent* gegen den Grenzwert, andernfalls *divergent.* Wachsen die Glieder einer Folge mit wachsendem n über jede noch so große positive Zahl, so schreibt man $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$; sinken sie unter jede noch so kleine negative Zahl, so schreibt man $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Beispiele:

1. Die Folge $a_n = 3$ (d.h. 3,3,3,3, ...) konvergiert gegen $a = 3$, da alle Glieder von (a_n) von $a = 3$ den Abstand 0 haben.

2. Die Folge (a_n) mit $a_n = (-1)^n$ (d.h. $1, -1, 1, -1$, ...) ist divergent, da die Glieder ständig abwechselnd $+1$ oder -1 sind. Die Forderungen an einen Grenzwert sind also für keine reelle Zahl a erfüllbar.

Es gelten die folgenden *Grenzwertrechenregeln*: Haben die Folgen (a_n) und (b_n) die Grenzwerte a und b, so konvergieren die Folgen

$$\begin{aligned}
(a_n + b_n) &\to (a+b)\ , \\
(a_n - b_n) &\to (a-b)\ , \\
(a_n \cdot b_n) &\to a \cdot b\ , \\
\left(\frac{a_n}{b_n}\right) &\to \frac{a}{b} \quad \text{(im letzten Fall, falls } b_n \neq 0,\ b \neq 0).
\end{aligned}$$

Beispiele:

1. Die Folge (a_n) : $a_n = 3 + \frac{1}{n}$ konvergiert gegen 3, denn $(\frac{1}{n}) \to 0$, $(3) \to 3$ für $n \to \infty$ nach den Grenzwertrechenregeln.

2. Die Folge $(a_n): \ a_n = 3\,(\frac{1}{n}+1)$ konvergiert gegen 3, denn $(\frac{1}{n}) \to 0,\ (1) \to 1$, also $3\,(\frac{1}{n}+1) \to 3\,(0+1) = 3$.

Eine Folge, die den Grenzwert Null hat, nennt man *Nullfolge*. Speziell sind Folgen von Brüchen mit konstantem Zähler, deren Nenner mit wachsendem n gegen $+\infty$ oder gegen $-\infty$ streben, stets Nullfolgen.

Beispiel:
Die Folgen (a_n) mit $a_n = \frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n^a}$ mit $a \in \mathbb{R}, a > 0$, $\frac{1}{n+1}$, $\frac{1}{n^5+2n+5}$ usw. sind Nullfolgen.

Aufgaben:
Bestimme ggf. die Grenzwerte der Folgen (a_n) mit

1. $a_n = -\frac{n}{2n+1}$
2. $a_n = \frac{n+1}{n^2+7}$
3. $a_n = \frac{2n^2-n+1}{n^2+1}$
4. $a_n = a^n$ mit $a \in \mathbb{R}, a > 0$ konstant
5. $a_n = \frac{n^2+1}{n+3}$.

Lösungen:

1. $$\lim_{n\to\infty} \frac{-n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{2+\frac{1}{n}} = \frac{\lim_{n\to\infty}(-1)}{\lim_{n\to\infty} 2 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = -\frac{1}{2}$$

2. $$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+7} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{n+\frac{7}{n}} = 0$$

3. $$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-n+1}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} = 2$$

4. $a > 1: \ \lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty, \quad a = 1: \ \lim\limits_{n\to\infty} a^n = 1,$ da $1^n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

   $0 < a < 1: \ \lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0,$ da man $a = \dfrac{1}{b}$ mit $b > 1$ setzen kann.

5. $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}} = +\infty.$$

Anmerkung:
Nicht alle Grenzwerte von Folgen sind mit einfachen Mitteln bestimmbar. So besitzt z.B. die Folge $(a_n),\ a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ einen transzendenten Grenzwert, der bei $2.71828\ldots$ liegt, und den man mit e bezeichnet.

8.3 Unendliche Reihen

Gegeben sei eine Folge (a_n). Schreibt man zwischen ihre ersten n Glieder Pluszeichen, so bezeichnet man den entstehenden Ausdruck

$$s_n := a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

als *n-te Partialsumme* zur Folge (a_n), oder als *endliche Reihe* von $k = 1$ bis $k = n$, abgekürzt

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad a_k \in \mathbb{R}.$$

Es ist also $s_1 = a_1,\ s_2 = a_1 + a_2,\ s_3 = a_1 + a_2 + a_3$, usw. Oftmals interessiert nun die Frage, was passiert, wenn man zwischen *alle* Glieder der Folge (a_n) Pluszeichen schreibt, d.h. welchen Wert ggf. die „unendliche Summe"

$$s := a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$$

annimmt. Man bezeichnet diesen Ausdruck als *unendliche Reihe*, abgekürzt

$$s_\infty := \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad a_n \in \mathbb{R}.$$

Wählt man z.B. die Folge (a_n) mit $a_n = 1$, so ist unmittelbar ersichtlich, daß die Summe aller Glieder über alle Grenzen wächst, je mehr Glieder man addiert. Für uns sind die Fälle interessant, in denen die unendliche Reihe einen endlichen „Summenwert" s_∞ annimmt.
Da die Partialsummen s_n mit wachsendem n sich unserem Reihen-Ausdruck $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ immer mehr nähern, wird definiert:

> Ist die Folge (s_n) der Partialsummen der Folge (a_n) konvergent mit $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, so nennt man auch die unendliche Reihe *konvergent* mit dem Summenwert
>
> $$s = s_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Man sagt in diesem Falle: „Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hat einen endlichen Wert s" (zum Grenzwert). — Ist dagegen (s_n) divergent, so nennt man auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergent*. Ist speziell $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$ bzw. $-\infty$, so schreibt man analog $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$ bzw. $-\infty$.

Beispiele:

1. Gegeben sei die Folge (a_n) mit $a_n = 1$. Ist die zugehörige unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ konvergent oder divergent? – Es ist $s_1 = 1,\ s_2 = 1 + 1 = 2,\ s_3 = 3,\ \ldots,\ s_n = n$; $\lim_{n\to\infty} n = +\infty$. Also ist die Reihe divergent, und zwar ist $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = +\infty$, wie schon oben anschaulich festgestellt.

2. Gegeben sei die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, die sogenannte *harmonische Reihe*. Da ihre Glieder mit zunehmendem n immer kleiner werden, könnte man annehmen, daß die Reihe einen endlichen Summenwert besitzt. Dies ist jedoch nicht richtig; die Reihe divergiert:

   Beweis: Man bilde für $n \in \mathbb{N}$ beliebig die n-te und die $2n$-te Partialsumme:

   $$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \qquad ; \qquad s_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{2n}\ .$$

Wäre nun die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} := s_\infty$ konvergent, so wäre $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ (wie oben definiert) mit einer Zahl s als Grenzwert; ebenso natürlich $\lim_{n\to\infty} s_{2n} = s$. Also gilt nach den Grenzwertrechenregeln $\lim_{n\to\infty}(s_{2n} - s_n) = s - s = 0$. Es ist nun immer $s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$. Von diesen Brüchen ist $\frac{1}{2n}$ der kleinste, daher ist sicherlich

$$s_{2n} - s_n > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \, .$$

Die Glieder der Folge $(s_{2n} - s_n)$ sind also immer größer als $\frac{1}{2}$, im Widerspruch dazu, daß $\lim_{n\to\infty}(s_{2n} - s_n) = 0$ ist, wie wir oben festgestellt haben. Daher kann $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ keine richtige Aussage sein. Damit ist aber gezeigt, daß $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent ist. $\square$

8.4 Wichtige endliche und unendliche Reihen

Unter einer *endlichen arithmetischen Reihe* versteht man (siehe Kapitel 8.3) einen Ausdruck der Form

$$s_n := a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n,$$

wobei die Summanden aus einer arithmetischen Folge stammen. Wegen

$$a_2 = a_1 + d,\ a_3 = a_1 + 2d,\ \ldots\ ,\ a_n = a_1 + (n-1)d$$

(d ist die konstante Differenz der Folge) ergibt sich

$$\left.\begin{array}{rcl} s_n &=& a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + a_1 + (n-1)d \\ s_n &=& a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \cdots + a_n - (n-1)d \end{array}\right\} +$$

$$\begin{array}{rcl} 2s_n &=& (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n) \\ &=& n\ (a_1 + a_n) \end{array}$$

also

$$s_n = \frac{n}{2}\ (a_1 + a_n) \qquad (\text{Gauss})$$

Beispiel:
Addiere alle Zahlen von 1 bis 100.
Lösung:

$$s_{100} = 1 + 2 + 3 + \ldots + 100 = \frac{100}{2}\ (1 + 100) = 50 \cdot 101 = 5050 \, .$$

Was läßt sich nun über *unendliche arithmetische Reihen* sagen, d.h. über Ausdrücke der Form

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, ,$$

wobei die a_n aus einer arithmetischen Folge stammen? Wir prüfen, ob die Partialsummenfolge (s_n) konvergiert oder nicht: Es war (s.o.)

$$s_n = \frac{n}{2}\,(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}\,(a_1 + a_1 + (n-1)d) = na_1 + \frac{d}{2}\,n(n-1)\ .$$

Da d und a_1 konstant sind, gilt

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (na_1 + \frac{d}{2}\,n(n-1)) = \pm\infty\ .$$

Also gilt: Jede unendliche arithmetische Reihe divergiert.

Analog zum oben Gesagten nennt man Ausdrücke der Form

$$s_n := a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

(mit Summanden aus einer geometrischen Folge) eine *endliche geometrische Reihe*. Es ist also $a_n = a_1 q^{n-1}$, wobei q der Quotient der geometrischen Folge ist. Dann gilt:

$$\left.\begin{array}{rcl} s_n &=& a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-1} \\ qs_n &=& \phantom{a_1 + {}} a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-1} + a_1q^n \end{array}\right\} -$$

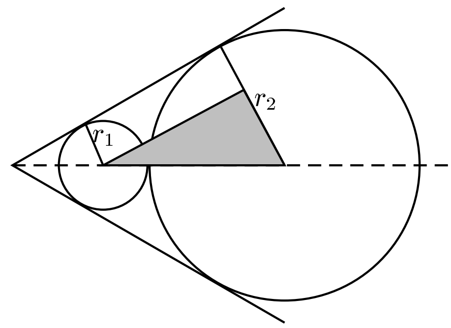
$$s_n - qs_n = \quad a_1 - a_1q^n$$

also

$$s_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \qquad (q \neq 1)$$

(für $q = 1$ kann man die Reihe z.B. auch als arithmetische Reihe behandeln).

Beispiel:
Im Winkelfeld eines Winkels von $\beta = 60°$ liegen fünf Kreise, die sich gegenseitig berühren und die die Schenkel des Winkels als gemeinsame Tangente haben. Berechne die Gesamtfläche der Kreise, wenn der Radius des ersten Kreises $r_1 = 2$cm ist.



Im grau unterlegten Dreieck ist

$$\sin\frac{\beta}{2} = \sin 30° = \frac{1}{2} = \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1} \iff r_1 + r_2 = 2(r_2 - r_1) \iff 3r_1 = r_2.$$

Analog ergibt sich $r_3 = 3r_2 = 3^2 r_1$, usw. Die Fläche des ersten Kreises ist $F_1 = \pi r_1^2$, die des zweiten Kreises $F_2 = \pi r_2^2 = \pi \cdot 3^2 r_1^2$, die des dritten Kreises $F_3 = \pi r_3^2 = \pi \cdot 3^4 r_1^2$. Die Kreisflächen bilden also eine geometrische Folge mit $q = 3^2 = 9$. Daher ist

$$s_5 = F_1 + F_2 + \ldots + F_5 = \frac{\pi r_1^2(1-9^5)}{1-9} = \frac{\pi \cdot 4(1-59049)}{-8} = 29524\,\pi\ \text{cm}^2.$$

Welche Aussagen lassen sich über Konvergenz bzw. Divergenz von *unendlichen geometrischen Reihen*

$$s_\infty := \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

mit Summanden a_n aus einer geometrischen Folge machen?

Behauptung: Die Folge (s_n) der n-ten Partialsummen (und damit auch s_∞) konvergiert für $|q| < 1$, divergiert jedoch für $q \geq 1$ und $q \leq -1$.

Beweis: a_1 und q sind konstant. Für $q > 1$ und für $q \leq -1$ existiert $\lim_{n\to\infty} q^n$ nicht (siehe Kapitel 8.3). Dann kann auch $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$ nicht existieren. Für $q = 1$ ist $s_n = a_1 + a_1 + a_1 + \cdots + a_1 = na_1$, d.h. auch in diesem Fall existiert $\lim_{n\to\infty} s_n$ nicht, also auch nicht der Summenwert von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Für $|q| < 1$ gilt dagegen $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, nach den Grenzwertrechenregeln also $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}$.

Anmerkung:
Bei geometrischen Folgen ist $a_n = a_1 q^{n-1}$, d.h. man kann eine geometrische Reihe auch in der Form

$$s_\infty := \sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$$

schreiben. Bezeichnet man das erste Reihenglied mit a_0 statt mit a_1, so erhält man die besonders einprägsame Schreibweise

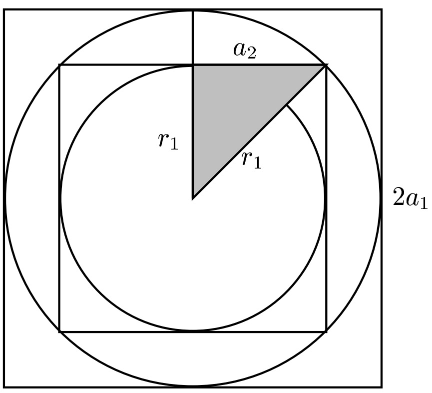
$$s_\infty := \sum_{n=0}^{\infty} a_0 q^n \qquad \text{für die geometrische Reihe.}$$

Für $|q| < 1$ ist also

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_0 q^n = \frac{a_0}{1-q}$$

die Summe einer konvergenten (unendlichen) geometrischen Reihe.

Beispiele:

1. 

Einem Würfel der Seitenlänge $2a_1$ ist eine Kugel, dieser wieder ein Würfel usw. einbeschrieben. Man berechne das Gesamtvolumen aller Kugeln und das aller Würfel.

Es ist $a_1 = r_1,\ a_2 = r_2,\ \ldots$ usw. Im grau unterlegten Dreieck der Abbildung ist

$$r_1^2 = r_2^2 + r_2^2 = 2r_2^2 \quad \Longrightarrow \quad r_2 = \frac{r_1}{\sqrt{2}}.$$

Analog gilt $r_3 = \frac{r_2}{\sqrt{2}}$ usw. Ebenso erhält man $a_2 = \frac{a_1}{\sqrt{2}}$, $a_3 = \frac{a_2}{\sqrt{2}}$ usw.
Volumen der Kugeln:

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3, \quad V_2 = \frac{4}{3}\pi \frac{r_1^3}{(\sqrt{2})^3}, \quad V_3 = \frac{4}{3}\pi \frac{r_1^3}{(\sqrt{2}^3)^2}, \ \dots \ ,$$

d.h. die Kugelvolumina bilden eine geometrische Folge mit $q = 1/(\sqrt{2})^3$. Also ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} V_n = \frac{\frac{4}{3}\pi r_1^3}{1 - \frac{1}{(\sqrt{2})^3}} = \frac{4}{3}\pi r_1^3 \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}-1} \ .$$

Volumen der Würfel:

$$V_1^* = (2a_1)^3 = 8a_1^3, \quad V_2^* = 8\frac{a_1^3}{(\sqrt{2})^3}, \quad \dots \text{ usw.},$$

d.h. die Würfelvolumina bilden eine geometrische Folge mit $q = 1/(\sqrt{2})^3$. Also ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} V_n^* = 8a_1^3 \frac{1}{1 - \frac{1}{(\sqrt{2})^3}} = 8a_1^3 \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}-1} \ .$$

2. Wandle den periodischen Dezimalbruch $0.\overline{25}$ in einen echten Bruch um. – Es ist $0.\overline{25} = \frac{25}{100} + \frac{25}{10000} + \dots$ (geometrische Reihe mit $q = \frac{1}{100}$ und $a_1 = \frac{25}{100}$).
Demnach ist:

$$s = 0.\overline{25} = \frac{25}{100} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{25}{99} \, .$$

9 Grenzwerte bei Funktionen, Stetigkeit

Beispiele:

1. Gegeben sei die Funktion $y = f(x) = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$. Für immer größer werdende x $(x \to +\infty)$, streben die Funktionswerte $f(x) = \frac{1}{x}$ gegen die Zahl 0, ebenso für immer kleiner werdende negative x $(x \to -\infty)$.

2. Gegeben sei die Funktion
$$y = f(x) = \begin{cases} x & \text{für} \quad 0 \leq x < 1 \\ 2 & \text{für} \quad 1 \leq x. \end{cases}$$
Wenn sich x von links her immer mehr dem Wert $+1$ nähert, streben die $f(x)$-Werte gegen $+1$. Nähert sich x dagegen von rechts her dem Werte 1, so streben die $f(x)$-Werte gegen $+2$. Einen Grenzwert an der Stelle $x = 1$ kann es also nicht geben, denn dieser muß unabhängig von der Art der Annäherung an die Stelle $x = 1$ sein. Offenbar ist es also sinnvoll, auch für *Funktionen* den Grenzwertbegriff einzuführen.

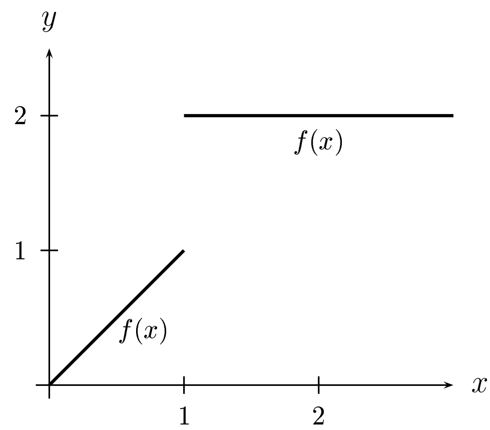


Abbildung 7: Graph von f

Grenzwert einer Funktion im Unendlichen $(+\infty)$
Man sagt, die Funktion $y = f(x)$ „hat in $+\infty$ den Grenzwert a", wenn es zu jeder positiven, beliebig kleinen Zahl ε („Abstandsschranke") einen hinreichend groß wählbaren Wert x_0 gibt, so daß für alle $x > x_0$ die zugehörigen Abstände $|f(x) - a|$ der Funktionswerte $f(x)$ von a kleiner als die „Abstandsschranke" ε werden.

Beispiele:

1. $f(x) = \frac{1}{x}$. Wählt man z.B. $\varepsilon = 0.1$, so kann man einen Wert x_0, nämlich z.B. $x_0 = 10$, finden, so daß für alle $x > x_0$ der Abstand der zugehörigen Funktion $f(x)$ von der Zahl Null kleiner als $\varepsilon = 0.1$ ist: $|f(x) - 0| = \frac{1}{x} < 0.1$, wenn nur $x > 10$. Hätte man $\varepsilon = 0.01$ als „Abstandsschranke" vorgegeben, so muß nur x_0 größer gewählt werden, nämlich $x_0 \geq 100$, damit wieder die Forderung $|f(x) - 0| < \varepsilon = 0.01$ für alle $x > x_0$ gilt. Wie klein man ε auch wählt, man kann stets ein x_0 finden, so daß die obige Forderung erfüllt ist. Also: $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

2. $f(x) = x^2$. Gibt man hier eine beliebig kleine „Abstandsschranke" ε vor, setzt man z.B. $\varepsilon = 0.1$, so kann man keinen Wert x_0 finden, so daß für alle $x > x_0$ der Abstand $|f(x) - a| = |x^2 - a| < \varepsilon$ $(= 0.1)$ wird. Egal, wie groß die (konstante) Zahl a ist, der Abstand $|x^2 - a|$ wächst für $x \to +\infty$ über alle Grenzen. Also hat $f(x)$ in $+\infty$ keinen (endlichen) Grenzwert.

Anmerkung:
Wächst $f(x)$ über alle Grenzen, falls $x \to +\infty$ geht, so schreibt man oftmals formal: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, z.B. $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$.
Entsprechend erklärt man $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
Genauso definiert man auch den Grenzwert einer Funktion in $-\infty$, d.h. $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

Grenzwert einer Funktion $y = f(x)$ an der Stelle x^*
Man sagt, die Funktion $y = f(x)$ „hat an der Stelle x^* den Grenzwert a“, wenn es zu jeder positiven, beliebig kleinen Zahl ε („Abstandsschranke“) einen positiven, hinreichend klein wählbaren Wert δ gibt, so daß für alle x, die in dem Intervall $(x^* - \delta, x^* + \delta)$ liegen, $|f(x) - a| < \varepsilon$ gilt. Abkürzend schreibt man: $\lim_{x\to x^*} f(x) = a$ für den Grenzwert von $f(x)$ an der Stelle x^*.

Schreibt man in der obigen Definition statt des Intervalls $(x^* - \delta, x^* + \delta)$ das Intervall $(x^* - \delta, x^*)$, bzw. $(x^*, x^* + \delta)$ vor, so spricht man von dem *links-* bzw. *rechtsseitigen Grenzwert a* der Funktion $f(x)$ an der Stelle x^*“, abgekürzt:

$$\lim_{\substack{x\to x^*\\ x<x^*}} f(x) = a \quad \text{oder auch} \lim_{x\to x^*-0} f(x) = a$$

bzw.

$$\lim_{\substack{x\to x^*\\ x>x^*}} f(x) = a \quad \text{oder auch} \lim_{x\to x^*+0} f(x) = a\,.$$

Der (beidseitige) *Grenzwert* in x^* liegt also vor, wenn links- *und* rechtsseitiger Grenzwert in x^* existieren, und wenn diese Werte gleich sind.

Beispiel:
Man untersuche die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für} \quad 0 \le x < 1 \\ 2 & \text{für} \quad 1 \le x \end{cases}$$

an der Stelle $x^* = 1$ auf das Vorhandensein eines links-, rechts- bzw. beidseitigen Grenzwerts. – Wie klein man ε auch wählt (z.B. $\varepsilon = 0.1$ oder 0.01), man findet stets einen Wert δ (z.B. $\delta = 0.1$ zu $\varepsilon = 0.1$ oder $\delta = 0.01$ zu $\varepsilon = 0.01$) (man muß δ ggf. nur hinreichend klein wählen), so daß für alle $x \in (x^* - \delta, x^*)$ (z.B. $= (0.9, 1)$ bzw. $(0.99, 1)$) $|f(x) - 1| < \varepsilon$ wird. Es ist nämlich dann $|f(x) - 1| = |x - 1| < 0.1$ für $x \in (0.9, 1)$ und sogar $|f(x) - 1| = |x - 1| < 0.01$, falls $x \in (0.99\ ,\ 1)$. Also hat $f(x)$ an der Stelle 1 den linksseitigen Grenzwert 1: $\lim_{x\to1-0} f(x) = 1$. Einen beidseitigen Grenzwert hat $f(x)$ in 1 jedoch nicht, denn wie nahe auch x von rechts an den Wert $x^* = 1$ herankommt, bleibt doch stets $|f(x) - 1| = 1$, d.h. $\lim_{x\to1} f(x)$ existiert nicht. Dagegen ist ersichtlich $\lim_{x\to1+0} f(x) = 2$.

Anmerkung:
Wächst $f(x)$ über alle Grenzen, wenn x gegen a strebt, so schreibt man $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$. Entsprechend erklärt sich $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Für die Grenzwerte von Funktionen gelten völlig analog wie bei Zahlenfolgen die

Grenzwertrechenregeln

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x)) &= \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)\ ,\\ \lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) &= \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)\ ,\\ \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) &= \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}\ ,\end{aligned}$$

wobei im letzten Falle $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ sein muß, und $\frac{f}{g}$ in „der Nähe von $x = a$“ definiert sein muß.

In diesen Grenzwertrechenregeln ist auch $a = +\infty$ oder $a = -\infty$ zulässig; ebenso sind einseitige Grenzwerte zulässig.

Beispiele:
Berechne folgende Grenzwerte von Funktionen, falls diese existieren:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\left(\sin x - \frac{\cos x}{x}\right)$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to-0}\left(\sin x - \frac{\cos x}{x}\right)$

Lösungen:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty}(1) + \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 1+0 = 1$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x} = \frac{\lim_{x\to 0}\cos x}{\lim_{x\to 0} x} = \frac{1}{\lim_{x\to 0} x}$, falls der Grenzwert existiert.

Nun ist jedoch $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{1}{x} = +\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to-o}\frac{1}{x} = -\infty$, d.h. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x}$ existiert nicht.

(c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x} = 0$, da $|\cos x| \leq 1$.

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{x+2} = \frac{4+4+4}{2+2} = \frac{12}{4} = 3$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\left(\sin x - \frac{\cos x}{x}\right) = \lim_{x\to+0}\sin x - \frac{\lim_{x\to+0}\cos x}{\lim_{x\to+0} x} = 0 - \infty = -\infty$,

d.h. der Grenzwert existiert nicht.

(f) $\displaystyle\lim_{x\to-0}\left(\sin x - \frac{\cos x}{x}\right) = 0 - (-\infty) = +\infty$; der Grenzwert existiert nicht.

Stetigkeit:
Eine Funktion $y = f(x)$ heißt *stetig an der Stelle* x^*, wenn f an der Stelle x^* definiert ist *und* der (beidseitige) Grenzwert $\lim_{x\to x^*} f(x)$ existiert *und* wenn $\lim_{x\to x^*} f(x) = f(x^*)$ ist.

Es müssen alle drei Bedingungen erfüllt sein, sonst heißt die Funktion *unstetig* an der Stelle x^*.

Existiert zwar $\lim_{x\to x^*} f(x)$, ist aber $\lim_{x\to x^*} f(x) = a \neq f(x^*)$, so spricht man von einer *hebbaren Unstetigkeitsstelle*. Man kann nämlich in diesem Falle die ursprüngliche Definition für $f(x)$ an der Stelle x^* ändern, indem man $f(x^*) = a$ setzt.

Eine Funktion $y = f(x)$ heißt (generell) *stetig*, wenn sie an allen Stellen ihres Definitionsbereichs stetig ist.

In der graphischen Darstellung von $f(x)$ äußert sich die Stetigkeit in einem ununterbrochenen Kurvenzug, einzelne Unstetigkeitsstellen in Sprungstellen des Kurvenzugs. – Die elementaren Funktionen sind sämtlich stetig bis auf einzelne Unstetigkeitsstellen.

Beispiele:

1. Die Funktionen $y = x,\ y = x^2,\ y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = e^x,\ y = e^{-x}$ sind sämtlich stetig.

2. Die Funktion $y = \frac{1}{x}$ ist für $x \in \mathrm{I\!R},\ x \neq 0$ stetig. In $x = 0$ ist $y = \frac{1}{x}$ unstetig, da $y(0)$ nicht definiert ist.

3. Die Funktion
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für} \quad 0 \leq x < 1 \\ 2 & \text{für} \quad 1 \leq x \end{cases}$$
ist an der Stelle $x = 1$ unstetig, da $\lim_{x\to 1+0} f(x) = 2 \neq \lim_{x\to 1-0} f(x) = 1$. Für alle anderen $x \in \mathrm{I\!R},\ x > 0$ ist $f(x)$ stetig.

4. Die Funktion
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für} \quad x < 0 \text{ und für } x > 0 \\ 1 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$
ist überall außer in $x = 0$ stetig. Es ist nämlich
$$\lim_{x\to +0} f(x) = 0 = \lim_{x\to -0} f(x) \neq f(0) = 1.$$
Es handelt sich um eine hebbare Unstetigkeit: Erklärt man $f(x)$ an der Stelle $x = 0$ statt zu 1 zu 0, so ist $f(x)$ überall stetig.

10 Trigonometrische Funktionen

Das in der elementaren Geometrie allgemein übliche Gradmaß, d.h. die Einteilung des Vollkreises in 360° ist für andere Gebiete der Mathematik ungeeignet. Stattdessen rechnet man mit dem *Bogenmaß*:

Ausgehend vom Kreis mit dem Radius 1 (*Einheitskreis*) ordnet man dem Zentriwinkel β den Kreisbogen b zu durch die Beziehung (Dreisatz!):

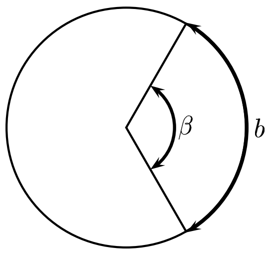


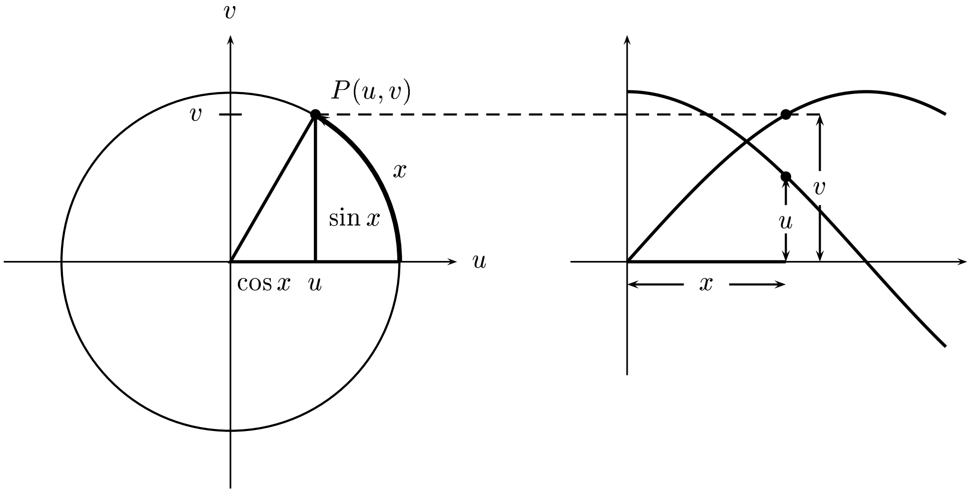
Abbildung 8: $b = \frac{\beta}{180} \cdot \pi$

Diese Zuordnung ist bijektiv. b ist eine dimensionslose Zahl. Die wichtigsten Werte kann man im Kopf ausrechnen, wenn man sich $\pi \mathrel{\widehat{=}} 180°$ (lies: π entspricht 180°) merkt:

Gradmaß	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Bogenmaß	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

Für die Ein- und Ausgabe haben wissenschaftliche Taschenrechner eigene Modi, die man über Funktionstasten anwählen kann. Um welches Maß es sich bei einer Winkelangabe handelt, erkennt man an den verschiedenen Schreibweisen:
$\pi \mathrel{\widehat{=}} 180°$, aber $\pi = 3.1415\ldots$. Eine Angabe mit „°“ bedeutet Gradmaß, ohne „°“ Bogenmaß.

Definitionen der Sinus- und Cosinusfunktionen



Zuordnungsvorschrift für Sinus- und Cosinusfunktion

Ordnet man für alle Punkte P der Bogenlänge x des Einheitskreisbogens von $(0,1)$ nach $P(u,v)$

1. die Ordinate v des Punktes P zu, so erhält man eine periodische Funktion

$$\sin \mid x \mapsto v, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Man nennt sie *Sinusfunktion*. Sie hat die primitive Periode 2π.

2. die Abszisse u des Punktes P zu, so erhält man eine periodische Funktion

$$\cos \mid x \mapsto u, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Man nennt sie *Cosinusfunktion*. Sie hat die primitive Periode 2π.

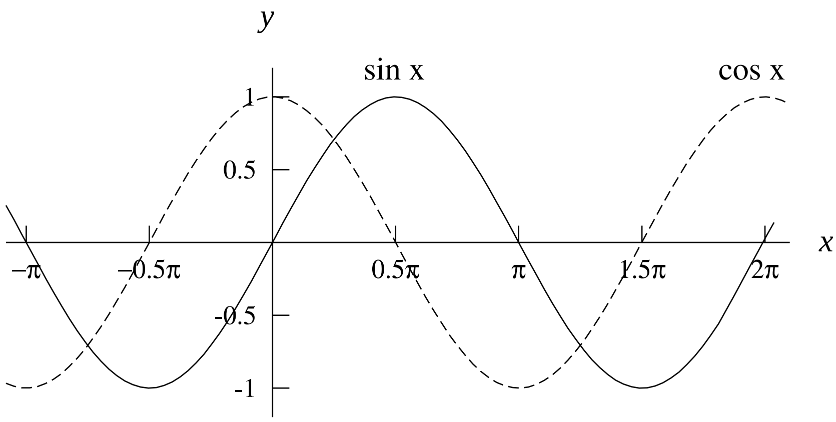


Abbildung 9: Graphen der Sinus- bzw. Cosinusfunktion

Wie man aus den Graphen der beiden Funktionen ablesen kann, gelten folgende Eigenschaften:

$$\begin{array}{rcl} \sin(x+n\pi) & = & -\sin(x+(n-1)\pi) \\ \cos(x+n\pi) & = & -\cos(x+(n-1)\pi) \end{array} \qquad n \in \mathbb{Z}$$

d.h. eine Parallelverschiebung um eine halbe Periodenlänge ändert das Vorzeichen.

$$\begin{array}{rcl} \sin(-x) & = & -\sin(x) \\ \cos(-x) & = & \cos(x) \end{array}$$

d.h. die Sinusfunktion ist ungerade, dagegen ist die Cosinusfunktion gerade.

$$\begin{array}{rcccl} -\sin(x-\frac{\pi}{2}) & = & \sin(\frac{\pi}{2}-x) & = & \cos x \\ \cos(x-\frac{\pi}{2}) & = & \cos(\frac{\pi}{2}-x) & = & \sin x \end{array}$$

d.h. bei Parallelverschiebung der y-Achse um $\frac{\pi}{2}$ in die positive x-Richtung (in Formeln: $\overline{x} = x - \frac{\pi}{2}$) gehen die Sinus- in die Cosinus- und entsprechend die Cosinus- in die Sinusfunktion über.

Beispiele:
Man berechne $\sin 230°50'$ durch Zurückführen auf einen Ausdruck der Form $\pm \sin\alpha$ mit $0° < \alpha \leq 90°$. (Zurückführen auf positiven spitzen Winkel).

Lösung: $\sin 230°50' = \sin(180° + 50°50') = \sin(\pi + 50°50')$
Nun gilt: $\sin(\pi + x) = -\sin x$, also

$$\sin(\pi + 50°50') = -\sin(50°50') = \underline{-0.77531} \qquad \text{(Tabellenwert)}$$

Genauso: $\cos(-640°10')$

Lösung:

$$\begin{array}{rclclcl} \cos(-640°10') & = & \cos(640°10') & = & \cos(640°10' - 2\pi) & = & \cos(280°10') \\ & = & \cos(270° + 10°10') & = & \cos(\frac{3}{2}\pi + 10°10') & = & \sin 10°10' \\ & = & \underline{0.17651} & & & & \end{array}$$

Definitionen der Tangens- und Cotangensfunktionen
Ordnet man für alle Punkte P der Bogenlänge x des Einheitskreisbogens von $(0,1)$ nach $P(u,v)$

1. das Verhältnis der Ordinate v zur Abszisse u des Punktes P zu, so erhält man eine periodische Funktion

   $$\tan \mid x \mapsto \frac{v}{u}, \qquad (2k+1)\frac{\pi}{2} \neq x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}.$$

   Man nennt sie *Tangensfunktion*. Sie hat die primitive Periode π.

2. das Verhältnis der Abszisse u zur Ordinate v des Punktes P zu, so erhält man eine periodische Funktion

$$\cot \mid x \mapsto \frac{u}{v}, \qquad k\pi \neq x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}.$$

Man nennt sie *Cotangensfunktion*. Sie hat die primitive Periode π.

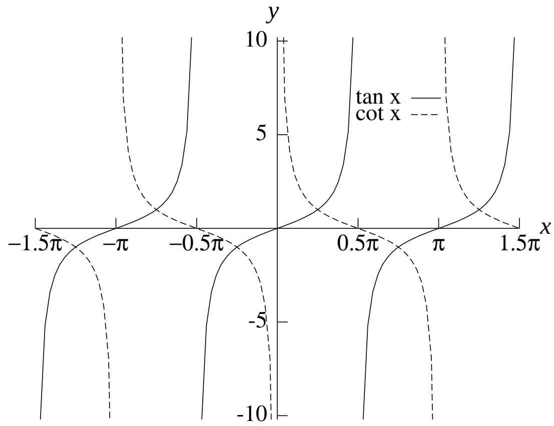


Abbildung 10: Graphen der Tangens- bzw. Cotangensfunktion

Wegen $\sin x = v$ und $\cos x = u$ gilt:

$$\begin{aligned} \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad (2k+1)\tfrac{\pi}{2} \neq x \in \mathbb{R}, \\ \cot x &= \frac{\cos x}{\sin x}, \qquad k\pi \neq x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Die Periodizität mit der primitiven Periode π bringt man folgendermaßen zum Ausdruck:

$$\begin{aligned} \tan(x + n\pi) &= \tan x \\ \cot(x + n\pi) &= \cot x \end{aligned} \qquad n \in \mathbb{Z}$$

10.1 Einige wichtige Formeln der Trigonometrie

Es gibt eine Fülle von Formeln, die Zusammenhänge zwischen den trigonometrischen Funktionen beschreiben. Man ist leicht verleitet, sie als trocken und unnötigen „Formelkram“ abzulehnen. Sie spielen in der Mathematik aber eine so wichtige Rolle, daß es von großem Vorteil ist, sich die wichtigsten Formeln einzuprägen.

Es läßt sich jede trigonometrische Funktion durch jede andere desselben Arguments ausdrücken:

	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$\tan\varphi$	$\cot\varphi$
$\sin\varphi$	$\sin\varphi$	$\pm\sqrt{1-\cos^2\varphi}$	$\frac{\tan\varphi}{\pm\sqrt{1+\tan^2\varphi}}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\cot^2\varphi}}$
$\cos\varphi$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\varphi}$	$\cos\varphi$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2\varphi}}$	$\frac{\cot\varphi}{\pm\sqrt{1+\cot^2\varphi}}$
$\tan\varphi$	$\frac{\sin\varphi}{\pm\sqrt{1-\sin^2\varphi}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2\varphi}}{\cos\varphi}$	$\tan\varphi$	$\frac{1}{\cot\varphi}$
$\cot\varphi$	$\frac{\pm\sqrt{1-\sin^2\phi}}{\sin\varphi}$	$\frac{\cos\varphi}{\pm\sqrt{1-\cos^2\varphi}}$	$\frac{1}{\tan\varphi}$	$\cot\varphi$

Des öfteren verwendet wurde in der obigen Tabelle die Formel:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Die Formeln

$$\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \end{aligned}$$

heißen *Additionstheoreme*. Aus ihnen folgt:

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\ . \end{aligned}$$

Weil die folgenden Funktionswerte der trigonometrischen Funktionen häufig gebraucht werden, sollte man sie im Kopf haben.

α im Gradmaß	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
α im Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
(`Merkregel` :	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$)
$\cos\alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$

Beispiel:

1. $\sin(-\frac{7\pi}{3}) = -\sin\frac{7\pi}{3} = -\sin(\frac{7\pi}{3} - 2\pi) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

2. $\cot(-\frac{7\pi}{3}) = -\cot\frac{7\pi}{3} = -\cot\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{\tan\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$

10.2 Goniometrische Bestimmungsgleichungen

Goniometrische Bestimmungsgleichungen sind Gleichungen, in denen die Werte von Unbekannten zu bestimmen sind, die als Argumente trigonometrischer Funktionen auftreten. Tritt in den Gleichungen auch die Unbekannte selbst auf,

$$\text{z.B.} \qquad \tan x - 3x = 0,$$

so spricht man von gemischt-goniometrischen Gleichungen, im anderen Falle von rein goniometrischen Gleichungen, z.B.

$$\sin(2x + \pi) - \sqrt{2}\cos x = 0.$$

Nach den Lösungsmethoden unterscheiden wir folgende Typen goniometrischer Gleichungen:

1. Die Gleichung enthält nur Terme einer trigonometrischen Funktion mit demselben Argument.
   Lösungsmethode: Durch eine Substitution läßt sich die Gleichung in eine allgemeine Gleichung überführen.
   Beispiel:

$$\begin{aligned} \tan^2 x + 5\tan x + 6 &= 0 \qquad \tan x = u \text{ gesetzt liefert:} \\ u^2 + 5u + 6 &= 0 \\ u_{1,2} &= -\tfrac{5}{2} \pm \sqrt{\tfrac{25}{4} - \tfrac{24}{4}} \\ u_1 &= -3 \\ u_2 &= -2 \end{aligned}$$

   Damit erhalten wir zwei Gleichungen

$$\tan x_1 = -3 \qquad\qquad \tan x_2 = -2\ .$$

   Die Lösungen entnimmt man einer Tabelle

$$x_1 \approx -1.249 \qquad\qquad x_2 \approx -1.107\ ,$$

   und wegen der Periode von $\tan x$ erhält man

$$x_{1,k} \approx -1.249 + k\pi \qquad x_{2,k} \approx -1.107 + k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

2. Die Gleichung enthält nur Terme einer trigonometrischen Funktion mit verschiedenen Argumenten.
   Lösungsmethode: Zurückführen auf Fall 1. mit Hilfe von Umformungen.
   Beispiel:

$$2\,\frac{\cot 2x}{1 - 3\cot x} = \frac{1}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 4\cot 2x = 1 - 3\cot x.$$

Benutzung der trigonometrischen Formel

$$\begin{aligned}
\cot 2x &= \frac{\cot^2 x - 1}{2\cot x} \qquad \text{ergibt} \\
2\,\frac{\cot^2 x - 1}{\cot x} &= 1 - 3\cot x \\
\Longleftrightarrow \quad 5\cot^2 x - \cot x - 2 &= 0 \qquad \text{(Fall 1.).}
\end{aligned}$$

3. Verschiedene trigonometrische Funktionen mit verschiedenen Argumenten.
   Lösungsmethode: Umschreiben auf Gleichung mit einer trigonometrischen Funktion mit einem Argument oder als Produkt.
   Beispiel:

$$\begin{aligned}
\sin(2x+\pi) - \sqrt{2}\cos x &= 0 \\
\Longleftrightarrow \quad -\sin 2x - \sqrt{2}\cos x &= 0 \\
\Longleftrightarrow \quad 2\sin x\cos x + \sqrt{2}\cos x &= 0 \\
\Longleftrightarrow \quad (2\sin x + \sqrt{2})(\cos x) &= 0
\end{aligned}$$

   Weiter durch Aufspalten a) $2\sin x + \sqrt{2} = 0$ b) $\cos x = 0$ nach der Regel: Ein Produkt wird 0, wenn mindestens ein Faktor 0 ist.

   Gemischt-goniometrische Bestimmungsgleichungen lassen sich nur graphisch oder durch Iterationsverfahren lösen.

11 Technik des Differenzierens

11.1 Die Ableitung einer Funktion

Eine Funktion $y = f(x)$ heißt *an der Stelle* x_0 ihres Definitionsbereichs *differenzierbar*, wenn rechts- und linksseitiger Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existieren und übereinstimmen. Schreibt man $x = x_0 + h$, so kann man diesen Grenzwert auch in der Form

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

angeben, da $x - x_0 = h$ ist, und weil $(x \to x_0) \iff (h \to 0)$. Der Grenzwert wird die *Ableitung* der Funktion $y = f(x)$ an der Stelle x_0 genannt und mit $y'(x_0)$ oder mit $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$ bezeichnet.

Stellt man $y = f(x)$ graphisch dar, so bedeutet die Differenzierbarkeit in x_0, daß die Funktionskurve im Punkt $(x_0, f(x_0))$ eine *Tangente* mit der Steigung

$$m = \tan \alpha = y'(x_0)$$

besitzt.

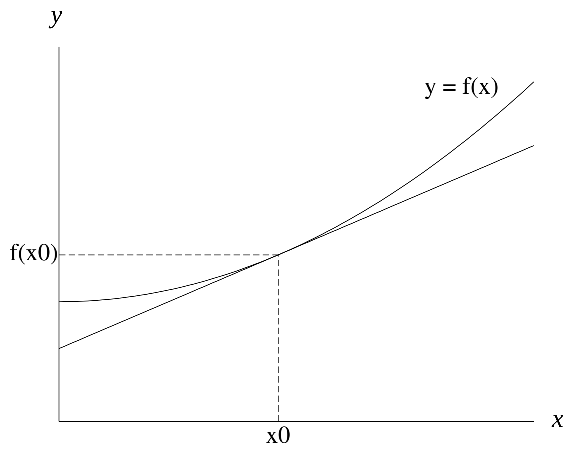


Abbildung 11: Steigung im Punkt $(x_0, f(x_0))$

Eine Funktion $y = f(x)$ heißt (generell) *differenzierbar*, wenn sie an jeder Stelle ihres Definitionsbereichs differenzierbar ist. Die elementaren Funktionen sind durchweg differenzierbar (ggf. bis auf gewisse Ausnahmestellen).

Beispiel:

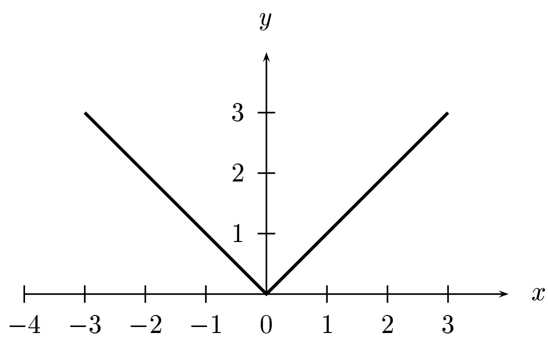


Abbildung 12: $y = |x|$

Die Funktion $y(x) = |x|$ ist überall außer in $x = 0$ differenzierbar: Für $x > 0$ ist nämlich $y = |x| = x$ (überall differenzierbar), für $x < 0$ ist $y = |x| = -x$ (überall differenzierbar). Jedoch ist

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to +0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} &= \lim_{x \to +0} \frac{|x|}{x} = +1 \quad \text{(rechtsseitiger Grenzwert)} \\
\lim_{x \to -0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} &= \lim_{x \to -0} \frac{|x|}{x} = -1 \quad \text{(linksseitiger Grenzwert).}
\end{aligned}$$

Da die Grenzwerte nicht übereinstimmen, ist $y = |x|$ an der Stelle $x = 0$ nicht differenzierbar. In der graphischen Darstellung äußert sich dies darin, daß die Funktionskurve im Punkt $(0, 0)$ keine Tangente besitzt.

11.2 Höhere Ableitungen einer Funktion

Ist die Funktion $y = f(x)$ differenzierbar, zumindest aber in einem ganzen Intervall ihres Definitionsbereichs differenzierbar, so kann dort also an jeder Stelle die Ableitung y' gebildet werden. y' ist dann wieder eine Funktion von x. Ist sie dort wieder differenzierbar (wie das bei elementaren Funktionen meist der Fall ist), so nennt man die Ableitung der (ersten) Ableitung $y'(x)$ die *zweite Ableitung* $y''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}$ der Ausgangsfunktion $y = f(x)$. Entsprechend kann es auch eine dritte, vierte, … Ableitung von $f(x)$ geben. Allgemein spricht man von der *n-ten Ableitung*

$$y^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$$

der Funktion $f(x)$. Ein Beispiel für eine Funktion, die genau n-mal differenzierbar ist lautet: $y = x^n|x|$; ihre Ableitung ist $y' = (n+1)x^{n-1}|x|$. Die n-te Ableitung $y^{(n)} = (n+1)!|x|$ ist an der Stelle $x = 0$ nicht differenzierbar, es existieren dort also keine weiteren Ableitungen.

In der graphischen Darstellung von $f(x)$ haben die Ableitungen anschauliche Bedeutungen:

- Gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f streng monoton wachsend, d. h. aus $x_1 < x_2$ folgt $f(x_1) < f(x_2)$.
- Gilt $f'(x) < 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f streng monoton fallend, d. h. aus $x_1 < x_2$ folgt $f(x_1) > f(x_2)$.
- Gilt $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f konstant, d.h. $f(x) = f(a)$ für alle $x \in [a, b]$.
- Gilt $f''(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f *konvex von unten.*
- Gilt $f''(x) < 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f *konvex von oben* oder *konkav.*

Zur Klassifizierung von Extremstellen ist die Einführung einiger Begriffe erforderlich. Eine auf $D \subseteq \mathbb{R}$ definierte Funktion f hat in $a \in D$ ein *absolutes Maximum*, wenn $f(x) \leq f(a)$ für alle $x \in D$. $f(b)$ heißt *relatives Maximum*, wenn es ein Intervall I mit Mittelpunkt b gibt, so daß $f(x) \leq f(b)$ für alle $x \in I \cap D$. Entsprechend sind *absolutes Minimum* und *relatives Minimum* definiert. Als Oberbegriff für Maximum und Minimum verwendet man den Begriff *Extremum*. Jeder Punkt, der einen konkav gekrümmten Teil eines Graphen von einem konvex gekrümmten Teil trennt, heißt *Wendepunkt*.

- Mögliche Extremstellen von $f \mid I \to \mathbb{R}$ sind
  - die Randpunkte von I, also höchstens zwei Zahlen;
  - die Punkte aus I, in denen f nicht differenzierbar ist;
  - die Punkte aus dem Inneren von I, für die $f'(x) = 0$ gilt.
- Sei $f(x)$ n-mal differenzierbar in a und $f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$ und $f^{(n)}(a) \neq 0 \qquad (n \geq 2)$.
  - Ist n gerade, so besitzt f einen lokalen Extremwert in a, und zwar
    - ein lokales Maximum, falls $f^{(n)}(a) < 0$,
    - ein lokales Minimum, falls $f^{(n)}(a) > 0$ ist.
  - Ist n ungerade, so liegt in a kein lokaler Extremwert (sondern ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente).

Beispiel:
$y = x^4$ hat an der Stelle $x_0 = 0$ ein Minimum; denn $y^{(4)}(0) = 24$ und $y^{(k)}(0) = 0$ für $k < 4$.
$y = x^5$ hat an der Stelle $x = 0$ einen Wendepunkt.

11.3 Grundregeln der Differentiation

Will man die Ableitung einer Funktion in gewissen Punkten berechnen, so wäre es mühsam, dies jeweils durch Bestimmung des Grenzwerts $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ in den einzelnen Punkten zu tun. Es bietet sich jedoch – zumindest bei den meisten elementaren Funktionen – eine einfachere Möglichkeit an; und zwar genügt es, dazu einige allgemeine *Ableitungsregeln* sowie die Ableitungen einer Reihe einfacher Funktionen zu kennen.

a) **Die Ableitung einer Konstanten** ist stets Null:
$y = f(x) \equiv c \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}, \text{ konstant} \quad \Longrightarrow \quad y' = 0.$

b) **Die Ableitung einer Funktion mit konstantem Faktor**:
$y = cf(x)$ mit $c \in \mathbb{R}$, konstant $\quad \Longrightarrow \quad y' = cf'(x)$, d.h. ein konstanter Faktor bleibt beim Differenzieren erhalten.

c) **Die Ableitung der Summe (bzw. Differenz) mehrerer Funktionen** ist die Summe (Differenz) der Ableitungen der Summanden:

$$y = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) \quad \Longrightarrow \quad y' = f_1'(x) + \cdots + f_n'(x).$$

d) **Die Ableitung des Produkts zweier Funktionen (*Produktregel*)**:

$$y = f(x) \cdot g(x) \quad \Longrightarrow \quad y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

e) **Die Ableitung des Quotienten zweier Funktionen (*Quotientenregel*)**:

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0) \quad \Longrightarrow \quad y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

(`Merke`: Der Zähler von y' beginnt mit der *abgeleiteten* Zählerfunktion $f(x)$!)

f) **Die Kettenregel**:
Oftmals kann eine Funktion $y = F(x)$, die auf direkte Weise schwierig zu differenzieren wäre, als Schachtelfunktion $y = f(h(x))$ aufgefaßt werden, in der – wenn man $h(x) = z$ benennt – die Funktion f auf einfache Weise nach der Veränderlichen z und die Funktion h auf einfache Weise nach der Veränderlichen x differenziert werden kann. Dann gilt die Kettenregel:

$$y' = F'(x) = \frac{df}{dz} \cdot \frac{dh}{dx} = f'(z) \cdot h'(x) \quad (h(x) = z \text{ gesetzt}).$$

Beispiel: Die Ableitung der Funktion $y = \sin(4x^2 + 1)$ ist auf direkte Weise nicht berechenbar. Faßt man dagegen $\sin(4x^2 + 1)$ als Schachtelfunktion $f(h(x))$ mit $z = h(x) = 4x^2 + 1$, $f(z) = \sin z$ auf, so ist $f(z)$ sehr einfach nach z, $h(x)$ sehr einfach nach x differenzierbar. Die Lösung lautet $y' = \cos z \cdot 8x = \cos(4x^2 + 1) \cdot 8x$ (siehe unten).

Anmerkung:
Bei vielen Aufgaben sind die Regeln a) bis f) kombiniert in der richtigen Reihenfolge anzuwenden.

11.4 Ableitungen einiger elementarer Funktionen

(a) Die Potenzfunktion $y = x^a,\ a \in \mathbb{R}$
$y = x^n,\ n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad y' = nx^{n-1}$. Diese Regel gilt jedoch nicht nur für ganzzahlige positive Exponenten n, sondern allgemein für alle reellen Zahlen a:

$$y = x^a,\ a \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ y' = ax^{a-1}.$$

Bemerkung: Für $a < 0,\ a \in \mathbb{Q}$ ist der Definitionsbereich von $y = x^a$ maximal $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; für $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, d.h. a irrational, beschränkt man den Definitionsbereich meist auf $\mathbb{R}_+ =$

$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ (s.u.).
Beachte: Negative Hochzahlen bedeuten die reziproke Funktion, z.B.

$$x^{-5} = \frac{1}{x^5} \quad (x \neq 0).$$

Gebrochene Hochzahlen bedeuten i.a. eine Wurzelfunktion (Definitionsbereich i.a. $\mathbb{R}_+$), z.B. $x^{3/2} = \sqrt{x^3}$; $x^{-1/5} = \frac{1}{\sqrt[5]{x}}$. Allgemeine reelle (also auch irrationale) Hochzahlen erklärt man durch die sogenannte *allgemeine Potenz*:

$$x^a := e^{a \cdot \ln x} \qquad \text{für } x > 0$$

(d.h. Definitionsbereich $\mathbb{R}_+$), z.B. $\pi^\pi = e^{\pi \cdot \ln \pi}$. Da $\ln x$ die Umkehrfunktion von e^x in $\mathbb{R}_+$ ist, stimmt für $a \in \mathbb{Q}$ diese Definition der Potenz mit der „normalen" Definition überein:

$$x^{\frac{p}{q}} := e^{\ln x \cdot \frac{p}{q}} = (e^{\ln x})^{\frac{p}{q}} = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p} \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}_+,\ p, q \in \mathbb{Z}.$$

(b) Die trigonometrischen Funktionen $y = \sin x,\ \cos x,\ \tan x,\ \cot x$

$$\begin{aligned}
&y = \sin x \quad \Longrightarrow \quad y' = \cos x;\\
&y = \cos x \quad \Longrightarrow \quad y' = -\sin x\\
&y = \tan x \ (x \neq \text{ungerade Vielfache von } \tfrac{\pi}{2}) \quad \Longrightarrow \quad y' = \frac{1}{\cos^2 x}\\
&y = \cot x \ (x \neq \text{gerade Vielfache von } \tfrac{\pi}{2}) \quad \Longrightarrow \quad y' = -\frac{1}{\sin^2 x}
\end{aligned}$$

(c) Die Exponentialfunktion $y = e^x$

$$y = e^x \quad \Longrightarrow \quad y' = e^x = y.$$

(d) Der natürliche Logarithmus $y = \ln x$

$$y = \ln x \quad (x > 0) \quad \Longrightarrow \quad y' = \frac{1}{x}.$$

(e) Die allgemeine Exponentialfunktion $y = a^x$ und der allgemeine Logarithmus $y = \log_a x$

$$y = a^x \ (a \in \mathbb{R},\ a > 0 \text{ konstant}) \quad \Longrightarrow \quad y' = a^x \ \ln a$$

$$y = \log_a x \ (a \in \mathbb{R},\ a > 0 \text{ konstant};\ x > 0) \quad \Longrightarrow \quad y' = \frac{1}{x} \ \log_a e$$

11.5 Anwendungsbeispiele

Beispiele:

1. Differenziere
$$y = \frac{\sqrt{x}-1}{2x^2}(1+\sqrt{x})^2 \qquad (x \neq 0).$$
Da man durch Umformungen zu erwartende Vereinfachungen beim Differenzieren erstreben sollte, schreiben wir $y = \frac{x-1}{2x^2}(\sqrt{x}+1)$. Auf die Faktoren $\frac{x-1}{2x^2}$ und $(\sqrt{x}+1)$ ist die Produktregel anzuwenden. Also
$$\begin{aligned} y' &= \frac{1 \cdot 2x^2 - 4x(x-1)}{4x^4}(\sqrt{x}+1) + \frac{x-1}{2x^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{(-x+3)\sqrt{x} + (-2x+4)}{4x^3}. \end{aligned}$$

2. Differenziere
$$y = x^x \qquad (x > 0).$$
Es ist $y = e^{x \cdot \ln x}$. Zu berücksichtigen sind Kettenregel und Produktregel (im Exponenten).
Mit $z := x \ln x$ folgt also:
$$\begin{aligned} y' &= \frac{d(e^z)}{dz} \cdot \frac{d(x \cdot \ln x)}{dx} \\ &= e^{x \cdot \ln x}(x \cdot \frac{1}{x} + 1 \cdot \ln x) \\ &= x^x(1 + \ln x) \qquad\qquad (x > 0)\ . \end{aligned}$$

12 Anwendungen der Differentialrechnung

12.1 Kurvendiskussion

Unter einer Kurvendiskussion einer expliziten Funktion $y = f(x)$ versteht man deren Untersuchung auf Symmetrie, Nullstellen, Polstellen, relative Extrema, Wendepunkte, Verhalten im Unendlichen, Unstetigkeitsstellen, usw. Ziel ist es, eine Vorstellung zu bekommen, was sich bei einem durch $y = f(x)$ beschriebenen Vorgang ereignet.

Beispiel:

$$y = \frac{x^2+1}{x^2-4}$$

Wegen

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-4} = \frac{(-x)^2+1}{(-x)^2-4} = f(-x)\ ,$$

ist die Funktion symmetrisch zur y-Achse.
Verhalten im Unendlichen:

$$y = \frac{x^2+1}{x^2-4} = 1 + \frac{5}{x^2-4}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} 1 + \frac{5}{x^2-4} = 1,$$

d.h. die Gerade $y = 1$ ist eine unterhalb von $f(x)$ verlaufende Asymptote.
Notwendige und hinreichende Bedingung für Nullstellen:
Zähler$(x_0) = 0$ und Nenner$(x_0) \neq 0$. Da $x^2 + 1 = 0$ keine Lösung in $\mathbb{R}$ besitzt, hat $f(x)$ keine Nullstellen.
Schnittpunkt mit der y-Achse ist der Wert $y(0) = \frac{-1}{4}$.
Hinreichende Bedingung für Pole: $\mathrm{N}(x_p) = 0$ und $\mathrm{Z}(x_p) \neq 0$. Diese Bedingung ist hier erfüllt für $x_{p1} = -2$ und $x_{p2} = 2$.
Verhalten in der Nähe der Pole:

$$\lim_{x\to 2\pm 0} \frac{x^2+1}{x^2-4} = \pm\infty \qquad \lim_{x\to -2\pm 0} \frac{x^2+1}{x^2-4} = \mp\infty$$

Hinreichende Bedingung für relative Extremwerte ist $y'(x_E) = 0$ und $y''(x_E) \neq 0$. Wir bilden die Ableitungen:

$$y' = \frac{-10x}{(x^2-4)^2},\ y'' = \frac{10(3x^2+4)}{(x^2-4)^3},\ y''' = \frac{30(2x^3-3x^2-8x-4)}{(x^2-4)^4}\ .$$

$y'(x_E) = 0 \iff x_E = 0$, $y''(0) = \frac{40}{-64} < 0$. Im Punkt $(0, \frac{-1}{4})$ liegt ein relatives Maximum.
Die notwendige Bedingung $y''(x_W) = 0$ für Wendepunkte ist nicht erfüllbar, da
$10(3x^2 + 4) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

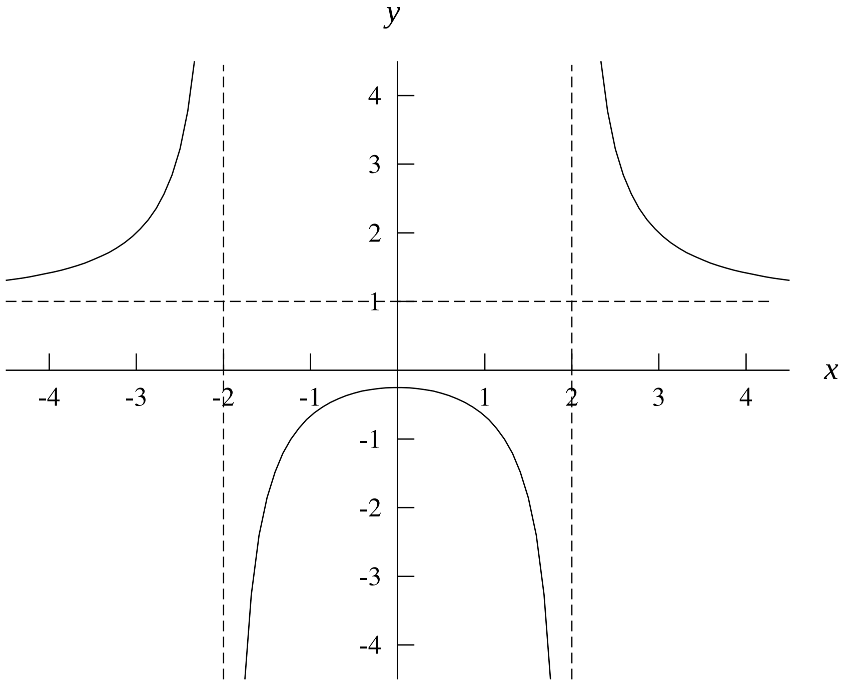


Abbildung 13: Graph der Funktion $y = \frac{x^2+1}{x^2-4}$

12.2 Die Regel von de L'Hospital

In Kapitel 9 haben wir uns mit Grenzwerten von Funktionen beschäftigt. Sehr oft ist die tatsächliche Berechnung von Grenzwerten äußert schwierig. So stößt man häufig auf das Problem, den Grenzwert eines Quotienten

$$\lim_{x \to a} h(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

für den Fall zu bestimmen, daß $f(x)$ und $g(x)$ beide den Grenzwert 0 oder beide den Grenzwert ∞ haben. Zur Ermittlung von grenzwerten solchen Typs stehen uns nun die Mittel der Differentialrechnung zur Verfügung, und es lassen sich nach de L'Hospital einfache Regeln aufstellen.

Regel von de L'Hospital

Die Funktionen f und g seien für alle $x \neq a$ einer Umgebung U von a differenzierbar, und es sei $g'(x) \neq 0$ für alle $x \neq a$. Ist

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0 \quad (\text{Typ } \tfrac{0}{0}) \qquad \text{oder}$$
$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \infty \quad (\text{Typ } \tfrac{\infty}{\infty})$$

und existiert der Grenzwert

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

so existiert auch der Grenzwert

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)},$$

und es ist

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Beachte: Zähler und Nenner sind getrennt abzuleiten.

Beispiel
Berechne

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}.$$

Lösung: Zähler und Nenner streben beide gegen 0, wenn x gegen 0 geht. Nun ist

$$\lim_{x \to 0} \frac{(e^x - 1)'}{x'} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{1} = 1.$$

Nach der Regel von de L'Hospital ist damit auch

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Liefert einmaliges Differenzieren von Zähler und Nenner noch keine Entscheidung, so kann man — wenn die Voraussetzungen erfüllt sind – die Regel auch mehrfach anwenden.

Beispiel

Berechne

(a)
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}$$

(b)
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 3x + 2}$$

Lösung:

(a)
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$$

(b)
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \to 1} \frac{3x^2 + 1}{2x - 3} = -4$$

Im Beispiel (b) darf man die Regel von de L'Hospital nicht zum zweitenmal anwenden, da der Ausdruck $\frac{3x^2-+1}{2x-3}$ nicht vom Typ $\frac{0}{0}$ und nicht vom Typ $\frac{\infty}{\infty}$ ist.

Achtung: Aus der Tatsache, daß $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ nicht existiert, folgt *nicht*, daß $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ebenfalls nicht existiert!

Bemerkung
Unbestimmte Ausdrücke der Form

$$0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty$$

lassen sich im allgemeinen in einen der Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ umformen.

Beispiele

1. $\lim\limits_{x\to 0+} x \cdot \ln x = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = 0$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - x - 1}{x(e^x - 1)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{e^x + xe^x - 1} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{2e^x + x \cdot e^x} = \dfrac{1}{2}$

3. $\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} e^{x\cdot\ln x} = e^{\lim_{x\to 0+} x\cdot \ln x} = e^0 = 1$

Im letzten Beispiel benutzt man die Stetigkeit der Exponentialfunktion.

12.3 Extremwertaufgaben

Unter Extremwertaufgaben versteht man Aufgaben aus Arithmetik, Geometrie, Physik, Technik usw., bei denen eine bestimmte Größe einen maximalen oder minimalen Wert annehmen soll.

Anleitung:
Man überlege, wie die Größe, die ein Extremum annehmen soll, durch andere Größen der Aufgabe in Form einer Funktionsgleichung ausgedrückt werden kann. Diese *Zielfunktion* enthält in der Regel mehr als eine Variable. Anschließend reduziere man die Anzahl der unabhängigen Variablen durch Berücksichtigung von Nebenbedingungen, bis die Zielfunktion eine Funktion mit einer Variablen ist. Von dieser berechne man die Extremwerte und weise die Art der Extrema nach.

Ein klassisches Beispiel sind die Größenverhältnisse einer Konservendose mit 850ml Inhalt. Bei ihrer Formgebung soll das vorgebene Volumen mit der kleinstmöglichen Oberfläche umschlossen werden.
Die Oberfläche $O = 2\pi r^2 + 2r\pi h$ soll unter der Nebenbedingung $V = r^2\pi h$ ein Minimum annehmen. Die Nebenbedingung nach h auflösen und in die Formel für die Oberfläche einsetzen ergibt:

$$\begin{aligned}
O &= 2\pi r^2 + \frac{2V}{r} \\
\frac{dO}{dr} &= 4\pi r - \frac{2V}{r^2} \\
\frac{dO}{dr} &= 0 \iff 4\pi r^3 - 2V = 0 \\
&\iff r_m = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\,.
\end{aligned}$$

Die Art des Extremwertes errechnet man mit Hilfe der 2. Ableitung:

$$\frac{d^2O}{dr^2} = 4\pi + \frac{4V}{r^3}\,.$$

Wegen $\frac{d^2O}{dr^2}(r_m) > 0$ liegt bei r_m ein Minimum.

Die optimale Höhe der Dose läßt sich nun leicht berechnen. Wir finden

$$h_m = \frac{V}{\pi r_m^2} = \frac{V}{\pi \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)^2}\,.$$

Dieser Ausdruck läßt sich unter Beachtung von $u = \sqrt[3]{u^3}$ und $\left(\sqrt[3]{v}\right)^2 = \sqrt[3]{v^2}$ folgendermaßen vereinfachen:

$$h_m = \frac{\sqrt[3]{V^3}}{\sqrt[3]{\pi^3} \cdot \sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi^2}}} = \sqrt[3]{\frac{V^3}{\frac{\pi^3 V^2}{4\pi^2}}} = \sqrt[3]{\frac{8V}{2\pi}} = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2r_m\,.$$

Man erkennt, daß dieses optimale Verhältnis von Radius und Höhe der Konservendose unabhängig vom Volumen ist. Speziell für unsere Dose mit 850ml Inhalt ergibt sich $r_m = 5.13$cm und $h_m = 10.26$cm.

13 Technik des Integrierens

13.1 Das unbestimmte Integral

Unter einer *Stammfunktion* $F(x)$ zur Funktion $f(x)$ versteht man diejenige Funktion $F(x)$, deren Ableitung $f(x)$ ist:

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \; .$$

Zu einer gegebenen Funktion $y = f(x)$ gibt es unendlich viele Stammfunktionen; denn mit $F(x)$ ist wegen

$$\frac{d(F(x)+C)}{dx} = f(x)$$

auch $F(x) + C$ Stammfunktion für jedes $C \in \mathbb{R}$.

Die Gesamtheit aller Stammfunktionen $F(x) + C$ heißt *unbestimmtes Integral* der Funktion $y = f(x)$, geschrieben

$$\int f(x)\; dx = F(x) + C \qquad \left(\int : \text{Integralzeichen};\; f(x) : \text{Integrand}\right)$$

13.2 Integrationsmethoden

Integrationsmethoden dienen zur Auffindung der zu einer gegebenen Funktion $f(x)$ gehörenden Stammfunktionen. Viele von ihnen führen das Problem der Auffindung von Stammfunktionen zurück auf sogenannte Grundintegrale, die in Tabellen zusammengefaßt sind. Die wichtigsten Grundintegrale sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

$$\int x^n\; dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\; (n \neq -1) \qquad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int a^x\; dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\; (a > 0) \qquad \int e^x\; dx = e^x + C$$

$$\int \sin x\; dx = -\cos x + C \qquad \int \sinh x\; dx = \cosh x + C$$

$$\int \cos x\; dx = \sin x + C \qquad \int \cosh x\; dx = \sinh x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C \qquad \int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C \qquad \int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x + C$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \arcsin x + C = -\arccos x + C' \\
\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} &= \operatorname{arsinh} x + C = \ln|(x+\sqrt{x^2+1})| + C \\
\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} &= \operatorname{arcosh} x + C = \ln|(x\pm\sqrt{x^2-1})| + C \\
\int \frac{dx}{1+x^2} &= \arctan x + C = -\operatorname{arccot} x + \tilde{C} \\
\int \frac{dx}{1-x^2} &= \operatorname{artanh} x + C = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + \tilde{C} \quad \text{für } |x|<1 \\
&= \operatorname{arcoth} x + C = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} + \tilde{C} \quad \text{für } |x|>1
\end{aligned}$$

Allerdings braucht das unbestimmte Integral einer aus elementaren Funktionen zusammengesetzten Funktion nicht wieder durch elementare Funktionen ausdrückbar zu sein.

Die beiden einfachsten Integrationsregeln lauten:

$$\int C\cdot f(x)\ dx = C\cdot\int f(x)\ dx\ ; \quad C\in\mathbb{R}$$

und

$$\int (f(x)\pm g(x))\ dx = \int f(x)\ dx \pm \int g(x)\ dx$$

Beispiele:

1. $\int 4\sin x\ dx = 4\int \sin x\ dx = -4\cos x + K$
2. $\int (x+\cos x)\ dx = \int x\ dx + \int \cos x\ dx = \frac{1}{2}x^2 + \sin x + \tilde{C}$, hierbei ist $\tilde{C}$ formal die Summe der beiden Konstanten, die bei den Integrationen auftreten.

13.3 Integrationsmethoden

Während die Differentiation einer Funktion vergleichsweise einfach ist, gibt es zur Berechnung des unbestimmten Integrals leider keine so einfachen Methoden. Im folgenden wollen wir zwei Verfahren vorstellen, mit deren Hilfe man in vielen Fällen die Berechnung des Integrals einer komplizierten Funktion auf die Berechnung der Integrale einfacherer Funktionen zurückführen kann.

(a) Die Substitutionsregel

Bei geeigneter Wahl der Funktion $x=\varphi(t)$ kann die rechte Seite der Gleichung

$$\int f(x)\ dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt$$

leichter zu integrieren sein.

Beispiel:
Berechne das Integral

$$(*) \qquad \int \frac{dx}{(2+3x)^2}\,.$$

Wir substituieren $2+3x = t$, also $x = \varphi(t) = \frac{t-2}{3}$. Wir erhalten $\varphi'(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{3}$ oder $dx = \frac{dt}{3}$. Einsetzen in $(*)$ ergibt

$$\int \frac{dx}{(2+3x)^2} = \int \frac{1}{t^2} \cdot \frac{dt}{3} = -\frac{1}{3t} + C = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2+3x} + C\,.$$

Die Substitutionsmethode liefert in dem Fall, wo die Ableitung des Nenners im Zähler des Integranden steht, eine allgemeingültige Formel:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\;dx = \ln|f(x)| + C.$$

Beweis: $f(x) = t \quad\Longrightarrow\quad f'(x)\;dx = dt$ also

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\;dx = \int \frac{1}{t}\;dt = \ln|t| + C = \ln|f(x)| + C$$

(b) Partielle Integration
Ist der Integrand als Produkt zweier Funktionen $f(x) = u(x)$ und $g(x) = v'(x)$ darstellbar, so gilt

$$\int u(x)v'(x)\;dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\;dx\;, \qquad \text{mit } u = f(x);\; v' = g(x)\;.$$

Diese Formel gestattet es, Integrale der Form $\int f(x)g(x)\;dx$ mit dem Ansatz $f(x) = u(x)$, $g(x) = v'(x)$ auf das oft leichter berechenbare Integral $\int u'(x)v(x)\;dx$ zurückzuführen.

Beispiel:
Berechne das Integral

$$\int xe^x\,dx\,.$$

Wir setzen $u(x) = x$ und $v'(x) = e^x$. Dann ist $u'(x) = 1$ und $v(x) = e^x$, und wir erhalten

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int 1 \cdot e^x\,dx = (x-1)\,e^x + C\,.$$

14 Aufgaben

14.1 Terminologisches

Aufgabe 1. Welchen Wahrheitswert haben folgende Aussagen?

a) 1 ist nicht kleiner als 1.

b) Es gibt genau zwei reelle Zahlen, die gleich ihrem Quadrat sind.

c) Jede gerade Zahl ist nicht Primzahl.

Aufgabe 2. Gib einige Aussagen an, die stets wahr sind.

Aufgabe 3. Welche der folgende Mengen definieren im mathematischen Sinn eine Menge?

a) Alle durch 2 teilbaren Zahlen.

b) Alle großen Männer Niedersachsens.

c) Alle Fische eines Sees, die länger als 50 cm sind.

d) Alle natürlichen Zahlen, die größer als 10, kleiner als 30 und durch 3 teilbar sind.

e) Alle dummen Schüler einer Klasse.

Aufgabe 4. Definiere folgende Mengen durch die Aufzählung ihrer Elemente.

a) $\{x \mid x \leq 5,\ x \text{ gerade},\ x \in \mathbb{N}\}$ b) $\{x \mid 1 \leq x < 10,\ x \text{ ungerade},\ x \in \mathbb{N}\}$

c) $\{x \mid x + 3 \leq 10,\ x \in \mathbb{N}\}$ d) $\{x \mid 15 \leq 3x < 25,\ x \in \mathbb{Z}\}$

e) $\{x \mid 10 < x < 24,\ x \text{ ist Primzahl}\}$ f) $\{x \mid x^2 \leq 10,\ x \in \mathbb{Z}\}$

Aufgabe 5. Definiere folgende Mengen durch eine charakteristische Eigenschaft.

a) $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ b) $\{3, 5, 7, 11, 13\}$

c) $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots\}$ d) $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

Hinweis: Viele Mengen lassen sich auf verschiedene Arten durch Angabe einer charakteristischen Eigenschaft definieren.

Aufgabe 6. Definiere folgende Mengen durch Aufzählung ihrer Elemente und durch Angabe einer charakteristischen Eigenschaft.

a) Alle durch 2 teilbaren natürlichen Zahlen.

b) Alle ganzen Zahlen, die, zu 5 addiert, 10 ergeben.

c) Alle durch 4 teilbaren natürlichen Zahlen, die kleiner als 20 sind.

Aufgabe 7. Welche der folgenden Beziehungen ist falsch?

a) $\{a, e, f\} \subseteq \{a, b, c, d, e, f\}$ b) $\{2, 3, 4, 5\} \subseteq \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x \text{ ist Primzahl}\}$

c) $\{0, 4, 8, 20\} \subseteq \{x \mid x = 4a,\ a \in \mathbb{N}\}$

Aufgabe 8. Bilde folgende mengentheoretischen Vereinigungen.

a) $\{2, 3, 5, 6, 7, 9\} \cup \{4, 8\}$

b) $\{x \mid 3 \leq x < 10,\ x \text{ ist Primzahl}\} \cup \{x \mid 3x < 10,\ x \in \mathbb{N}\}$

c) $\{x \mid 2x \leq 6,\ x \in \mathbb{N}\} \cup \{x \mid x < 7,\ x \text{ gerade},\ x \in \mathbb{N}\}$

Aufgabe 9. Bilde folgende mengentheoretischen Durchschnitte.

a) $\{a, b, c, d\} \cap \{c, d, e\}$ b) $\{2, 4, 6, 8\} \cap \{x = 4a,\ a \in \mathbb{N}\}$

c) $\{x \mid x \text{ Primzahl}\} \cap \{x \mid 4 < 3x < 20,\ x \in \mathbb{N}\}$

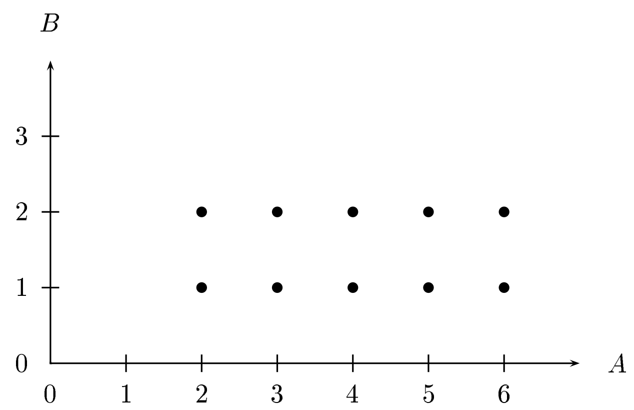
d) $\{x \mid x \text{ gerade},\ x \in \mathbb{N}\} \cap \{x \mid x \text{ ist Primzahl}\}$

Aufgabe 10. Bilde die kartesischen Produkte $A \times B$.

a) $A := \{2, 3\}$, $B := \{1, 2\}$ b) $A := \{a, o\}$, $B := \{b, h, n\}$

c) Skizziere das durch a) beschriebene Punktgitter.

d) Beschreibe folgendes Punktgitter durch ein kartesisches Produkt.



e) Skizziere $A \times B$ aus d), wenn in A und B die geraden Zahlen weggelassen werden.

Aufgabe 11. Skizziere die Elemente der Menge $\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid |x - 3| \leq 4 \text{ und } y = 0\}$ im x, y-Koordinatensystem.

14.2 Zahlen

Bruchrechnen

Aufgabe 1. Kürze folgende Brüche halbschriftlich.

a) $\frac{1232}{2310}$ b) $\frac{840}{1365}$ c) $\frac{103}{570}$ d) $\frac{6006}{14014}$ e) $\frac{53475}{58725}$ f) $\frac{189210}{329616}$

Aufgabe 2. Kürze folgende Brüche, nachdem durch Zerlegung in Primfaktoren der größte gemeinsame Teiler bestimmt wurde.

a) $\frac{1232}{2310}$ b) $\frac{111}{185}$ c) $\frac{270}{504}$ d) $\frac{144}{720}$ e) $\frac{315}{1155}$

Aufgabe 3. Man kürze folgende Brüche

a) $\frac{33075}{18900}$ b) $\frac{144}{168}$

Aufgabe 4.

a) 21, 27, 69, 161, 483 seien Nenner von Brüchen. Bestimme den Hauptnenner.

b) Ebenso für 35, 77, 85, 385, 935.

c) Welcher der beiden Brüche $\frac{5}{8}$ und $\frac{17}{30}$ ist größer?

d) Sortiere $\frac{5}{12}$, $\frac{3}{16}$, $\frac{1}{24}$, $\frac{5}{32}$, $\frac{17}{48}$ der Größe nach. (Ohne Umrechnen in Dezimalzahlen!)

Aufgabe 5. Berechne

a) $\frac{11}{12} - \frac{5}{56} + \frac{25}{42} + \frac{79}{84} - \frac{19}{21}$ b) $\frac{14}{27} + \frac{5}{18} + \frac{7}{9} + \frac{5}{6} - \frac{1}{3} - \frac{71}{81} - \frac{41}{54}$

Aufgabe 6. Berechne

a) $5\frac{1}{3} - 6\frac{3}{4} + 7\frac{1}{2} + \frac{4}{5} - 9\frac{5}{8} + 2\frac{11}{12}$ b) $19\frac{4}{13} - 54\frac{5}{18} - 1\frac{11}{12} + 36\frac{14}{39} + 15\frac{5}{6} - 2\frac{19}{72} - \frac{7}{24}$

c) $46\frac{51}{55} + 71\frac{41}{110} + 12\frac{25}{132} + 1\frac{19}{220} + 63\frac{23}{60} + 27\frac{19}{20}$

d) $\frac{13}{24} \cdot 16$ e) $\frac{32}{63} \cdot \frac{77}{80}$

f) $\frac{425}{252} \cdot \frac{110}{221} \cdot \frac{182}{165}$ g) $11\frac{3}{7} \cdot 3\frac{1}{8} \cdot 4\frac{4}{5} \cdot 2\frac{5}{8}$

Aufgabe 7. Berechne

a) $\dfrac{255}{728} : 102$ b) $28\dfrac{6}{11} : 4$ c) $\dfrac{795}{25232} : \dfrac{3975}{6308}$

Aufgabe 8. Vereinfache

a) $\dfrac{\frac{28}{65}}{\frac{14}{46}}$ b) $\dfrac{\frac{2}{5} + 3\frac{1}{4}}{9\frac{1}{2} - 4\frac{2}{3}}$ c) $\dfrac{3\frac{3}{8} \cdot 1\frac{31}{45} \cdot 7\frac{1}{7}}{\left(\dfrac{3\frac{13}{69} \cdot 3\frac{1}{15}}{3\frac{7}{27}}\right)}$

d) $\dfrac{1}{2 + \dfrac{3}{4 + \dfrac{5}{6 + \dfrac{1}{7}}}}$ e) $\dfrac{1}{3 + \dfrac{1}{3 + \dfrac{1}{3 + \dfrac{1}{3}}}}$

Dezimalzahlen, Dualsystem, Potenzen

Aufgabe 1. Schreibe die folgenden Brüche in Dezimalzahlen um.

a) $\dfrac{63}{100}$ b) $\dfrac{2}{10000}$ c) $\dfrac{275038}{100000000}$ d) $\dfrac{275368}{100000}$

Aufgabe 2. Forme in Dezimalzahlen um und kennzeichne die Periode

a) $\dfrac{1}{8}$ b) $\dfrac{31}{40}$ c) $\dfrac{3}{64}$ d) $\dfrac{6}{20}$ e) $\dfrac{1}{256}$

Aufgabe 3. Forme in Dezimalzahlen um.

a) $\dfrac{2}{7}$ b) $\dfrac{17}{12}$ c) $\dfrac{11}{26}$ d) $\dfrac{10}{11}$

Aufgabe 4. Forme in Brüche um.

a) 0.32 b) 0.0063 c) 17.0062007 d) 11.004 e) 0.000712

Aufgabe 5. Forme in Brüche um.

a) $0.\overline{27}$ b) $0.\overline{253}$ c) $0.3\overline{58}$ d) $2.\overline{33}$ e) $0.\overline{9}$ f) $23.005\overline{7}$

Aufgabe 6. Forme in Dualzahlen um.

a) 45 b) 305 c) 1024 d) 586

Aufgabe 7. Forme um in das Dezimalsystem.

a) 10001100 b) 10101010111 c) 100000001 d) 110010

Aufgabe 8. Vereinfache

a) $(-2x)^5 \cdot (-3y)^5$ b) $-(5a)^2$ c) $(-5a)^2$ d) $(6z^2q)^3 \cdot (18q^2z)^{-3}$

e) $(32ae^3)^8 \cdot (2^5a^4)^8 \cdot (4^{-8}e^{-24})$

Aufgabe 9. Berechne

a) $\left(4\frac{2}{3}\right)^3 : \left(\frac{7}{9}\right)^3$ b) $\frac{24^5}{16^3}$ c) $5u^2 \cdot 2u^4 \cdot 4u^6$

d) $0.15a^5x^n \cdot 0.8a^{4n}b^mx^2 \cdot 2a^4b^2x^5$

Aufgabe 10. Berechne

a) $(-3s^2)^3$ b) $(a^5)^7 \cdot (a^3)^4$ c) $(3^2)^4$ d) $3^{(2^4)}$

Aufgabe 11. Berechne

a) $(-v)^{11} : (-v)^5$ b) $a^{m+2} : a^{m-2}$ c) $x^{3a-2b} : x^{2a-3b}$

d) $\frac{4}{r^{12}} - \frac{12}{r^6s^4} + \frac{9}{s^8}$ e) $\frac{1}{q^{n-3}} - \frac{q^2-1}{q^{n+1}} - \frac{q^2-1}{q^{n-1}}$

Aufgabe 12. Berechne

a) $(xy)^{-2} : (xy)^{-5}$ b) $\frac{24a^3b^{-5}}{7c^3} : \frac{8b^{-4}c^{-4}}{21a^{-3}b^{-5}}$

Aufgabe 13. Schreibe mit Wurzelzeichen

a) $5^{\frac{2}{3}}$ b) $9^{-\frac{1}{2}}$ c) $x^{-0.75}$ d) $u^{5.9}$

Aufgabe 14. Schreibe als Potenz

a) $\sqrt[5]{x^2}$ b) $(\sqrt[5]{x})^2$ c) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{u^4}}$ d) $\dfrac{1}{\sqrt[n]{z^m}}$

Aufgabe 15. Berechne

a) $\sqrt[3]{6 \cdot \sqrt{3} + 9} \cdot \sqrt[3]{6 \cdot \sqrt{3} - 9}$ b) $3 \cdot \sqrt{125} - 2 \cdot \sqrt{20} - 3 \cdot \sqrt{180} + 6 \cdot \sqrt{45}$

c) $\sqrt[n]{a^{n-2}} \cdot \sqrt[n]{a^{n+3}}$ d) $\sqrt{72} : \sqrt{8}$ e) $\sqrt[3]{81a^5b^7} : \sqrt[3]{3ab}$

Aufgabe 16. Mache den Nenner rational.

a) $\dfrac{6}{\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{5}{3\sqrt{15}}$ c) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{9}}$ d) $\dfrac{a}{\sqrt{a}}$ e) $\dfrac{x}{\sqrt[7]{x^3}}$

Aufgabe 17. Für welche x-Werte existieren die Wurzeln?

a) $\sqrt{x}$ b) $\sqrt{x^3}$ c) $\sqrt[3]{x}$ d) $(\sqrt{x})^3$ e) $\sqrt[3]{x^2}$ f) $(\sqrt[3]{x})^2$

g) $\sqrt{1-x}$ h) $\sqrt{x-a}$ i) $\sqrt[3]{x-a}$ j) $\sqrt[2]{x^2}$ k) $(\sqrt[2]{x})^2$

Bruchrechnen mit Zahlensymbolen

Aufgabe 1. Berechne

a) $\dfrac{1}{4a} + \dfrac{2b+a}{6b^2} - \dfrac{3a+b}{9ab}$ b) $\dfrac{3m}{m+n} - 2$ c) $\dfrac{15mn}{2p} : (-3mn^2)$

d) $\left(\dfrac{a}{5} - \dfrac{5}{a}\right) : (a+5)$ e) $\left(\dfrac{x}{y^2} - \dfrac{y}{x^2}\right) : \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right)$ f) $\left(1 - \dfrac{b^2}{a^2}\right) : \left(\dfrac{a-b}{2a}\right)$

Aufgabe 2. Bringe auf den Hauptnenner und kürze:

a) $\dfrac{x^3+1}{5x^5} - \dfrac{3x^{m-1}-1}{9x^{m+1}} - \dfrac{3x^{m-4}-2x^{m-1}-5}{15x^{m+1}}$

b) $\dfrac{2x^{n+1}+3x^6+2x^5+1}{2x^{n+2}} - \dfrac{2x^{n-4}+3}{3x^{n-3}} - \dfrac{2x^{n-5}+9}{6x^{n-4}}$

c) $\dfrac{a+b}{a^2-ab} - \dfrac{a-b}{ab+b^2} + \dfrac{a\,(a-3b)}{a^2b-b^3}$

d) $\dfrac{x-1}{2x+4} - \dfrac{x+1}{3x-6} + \dfrac{6x^2+53x-10}{30x^2-120}$

e) $\dfrac{x^2}{4x^2-4x} : \dfrac{x^3}{2x+2} - \dfrac{x^2+2x}{3x^2-3} \cdot \dfrac{x+1}{x}$

Aufgabe 3. Welche der folgenden Terme sind mit dem Term $\dfrac{x^2}{3x-6}$ identisch?

a) $\dfrac{x^2}{x-2} : 3$ b) $1 : \dfrac{3x-6}{x^2}$ c) $\left(\dfrac{x}{3x-6}\right)^2$ d) $1 : \left(\dfrac{3}{x} - \dfrac{6}{x^2}\right)$

Aufgabe 4. Kürze und fasse zusammen:

a) $\dfrac{x^2-4}{x^2-1} \cdot \dfrac{x^2-x}{x^2+2x} : \dfrac{x^2+2x+1}{x^2-4x+4}$

b) $\dfrac{2a^2-2ab}{3ab+3b^2} : \left(\dfrac{3a^2-3ab}{4a^3+8a^2b+4ab^2} : \dfrac{a^2-4ab+4b^2}{8a^3+8a^2b}\right)$

c) $\left(\dfrac{a^2+ab}{ab-a^2} \cdot \dfrac{c^2+cd}{cd-d^2}\right) : \left(\dfrac{ac+ad}{bc-bd} : \dfrac{ad-bd}{ac+bc}\right)$

Aufgabe 5. Führe Partialdivision durch:

a) $(n^5+m^5) : (n+m)$ b) $(-6x^2+0.27x+0.06) : (2.5x+0.2)$

c) $(x^{m+2}+5x^{m+1}+6x^m) : (x^m+3x^{m-1})$

d) $(x^3+x^2y-3xy^2+y^3) : (x-y)$ e) $(x^3-4x^2+6x-5) : (x-2)$

f) $(144a^4-289a^2b^2+100b^4) : (12a^2+7ab-10b^2)$

g) $(12a^4-a^3b-32a^2b^2+ab^3+20b^4) : (4a^2+ab-5b^2)$

h) $(a^4-b^4) : (a+b)$

Aufgabe 6. Zerlege Zähler und Nenner vollständig in Faktoren und kürze

a) $\dfrac{9a^{2n+1}-a}{a^2-3a^{n+2}}$ b) $\dfrac{x^{2m+5}-2x^{m+5}y^s+x^5y^{2s}}{x^{2m+8}-y^{2s}x^8}$

Summen- und Produktzeichen, $\binom{n}{m}$

Aufgabe 1. Berechne

a) $\dbinom{49}{3}$ b) $\dbinom{10}{4}$ c) $\dbinom{10}{10-4}$ d) $\dbinom{4}{2}$

Aufgabe 2. Löse das Summenzeichen auf

a) $\sum_{k=4}^{10} k$ b) $\sum_{v=0}^{4}(-1)^{v+1}a^v b^{5-v}$ c) $\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}x^k y^{3-k}$

d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{5}\frac{(-x)^n}{(n-1)^n}$ e) $\sum_{m=0}^{4} 3^m$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{3}(-1)^n\left(\frac{3}{n}\right)^{2n+1}$

g) $\sum_{m=0}^{5}(2m+1)$ h) $\sum_{m=0}^{6}(2m-1)$ i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{5}\frac{1}{n!}$

k) $\sum_{n=0}^{4}\binom{4}{n}$ l) $\sum_{k=0}^{5}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$ m) $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{4}\frac{\sum_{m=1}^{2\ell} m}{\ell^2}$

Aufgabe 3. Schreibe mit Summenzeichen:

a) $1+4+9+16+25+36+49+64$ b) $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{9}$

c) $z^5+5z^4x+10z^3x^2+10z^2x^3+5zx^4+x^5$ d) $3^0+3^1+3^2+3^3$

e) $4^4-4^3+4^2-4^1+4^0$

Aufgabe 4. Löse das Produktzeichen auf

a) $\prod_{n=1}^{5} n^2$ b) $\dfrac{\prod_{n=2}^{4}(2n)^3}{(2^3)^2}$ c) $\prod_{k=1}^{6}\sqrt{125-k^3}$

d) $\prod_{\ell=1}^{5}(2+(-1)^{\ell+1}\cdot\ell)$ e) $\prod_{m=3}^{5} 4^{\frac{1}{m}}$

Aufgabe 5. Schreibe mit Produktzeichen:

a) $n!$ b) $\dbinom{49}{3}$ c) $\sqrt{n!}$ d) $\dbinom{10}{5}$

Logarithmen

Aufgabe 1. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

a) $\log_4 64 = 3$ b) $\log_{10} 100 = 2$ c) $\log_{50} 50 = 1$ d) $\log_{0.5} 0.25 = 2$

e) $\log_{\frac{1}{k}} k^2 = -2$ f) $\log_2 0.7071 = -0.5$ g) $\log_e 10 = 2.3026$ h) $\log_{10} 2^2 = 0.602$

i) $\log_{20} 1 = 0$

Aufgabe 2. Es ist $\lg 4.036 = 0.60595$. Berechne hiermit

a) $\lg 403.6$ b) $\lg 0.004036$ c) $\lg \sqrt[3]{40360}$ d) $\lg 403600$

e) $\lg 0.04036^2$ f) $\lg \frac{1}{4.036}$ g) $\lg \sqrt[2]{0.4036}$ h) $\lg \frac{40.36}{(4.036)^{\frac{1}{2}}}$

Aufgabe 3. Mit $\lg 2 = 0.30103$ berechne man

a) $\lg 16$ b) $\lg 200$ c) $\lg 0.25$ d) $\lg 64$

e) $\lg 0.5$ f) $\lg 2^{0.5}$ g) $\lg\left(\prod_{\ell=1}^{4} 2^\ell\right)$

Aufgabe 4. Man ermittle den Bereich, in dem die folgenden Ausdrücke erklärt sind:

a) $\log(1-x)$ b) $\lg x^2$ c) $\lg \sqrt[3]{-x^3}$

d) $\lg \frac{1}{1-x}$ e) $\lg(1-x^2)$ f) $\lg(x^2-1)$

Aufgabe 5. Man berechne x mit Hilfe der Logarithmen:

a) $25 = x^2$ b) $x^{-1} = 0.5$ c) $16^x = 1.4142$ d) $20^x = 2$ e) $10^x = 5$ f) $0.001^x = 1$

Aufgabe 6. Man berechne x:

a) $\log_2 x = 5$ b) $\log_6 x = 6$ c) $\log_{64} x = \frac{1}{3}$ d) $\log_x 25 = 2$

e) $\log_{0.5} x = -10$ f) $\log_{\frac{1}{9}} x = -0.5$ g) $\log_{2401} x = -\frac{1}{4}$ h) $\log_x 1 = 0$

Aufgabe 7. Man berechne oder vereinfache

a) $\lg\left(\frac{ab^2}{c}\right)^{0.5}$ b) $\lg(\sqrt{2})^3$ c) $\lg \sqrt[10]{0.1}$ d) $\lg \dfrac{20^{0.5} \cdot 4.036^{\frac{1}{2}}}{\prod_{\ell=1}^{3} 2^{-\ell}}$

14.3 Gleichungen

Vorbemerkungen

Eine Gleichung, die eine oder mehrere Unbekannte enthält, stellt eine Aussageform dar. Setzt man für die Unbekannten bestimmte feste Werte eines Zahlenbereiches ein, so geht die Aussageform in eine Aussage oder einen undefinierten (sinnlosen) Ausdruck über. Im ersten Fall erhält man eine wahre oder falsche Aussage, im zweiten Fall erklärt man die entsprechende Einsetzung für unzulässig und nimmt den Wert aus dem zugrunde gelegten Zahlenbereich heraus. Nullstellen von Nennern dürfen z.B. nicht eingesetzt werden. Genau die Elemente des „zulässigen Bereiches", die bei der Einsetzung eine wahre Aussage ergeben, bilden die Lösungsmenge der Gleichung.

Aufgabe 1. Bringe auf Normalform: (Der zugrunde gelegte Zahlenbereich seien die komplexen Zahlen.)

a) $\sqrt{x-a}-b=0$ b) $a\sqrt{bx+c}-d\sqrt{ex+f}=0$

c) $\sqrt{x+5}-\sqrt{2x+3}=1$ d) $\sqrt{x+2+\sqrt{2x+7}}=4$

e) $\dfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}}=\dfrac{1}{\sqrt{2x+10}}$ f) $\dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt{x}}{\sqrt{3x+1}}=\sqrt{6x-1}$

Welche Werte dürfen für x nicht eingesetzt werden?

Aufgabe 2. Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen bezüglich der angegebenen Grundmenge.

a) $x^2+x-56=0$ bezüglich $\mathbb{N}$

b) $\dfrac{7x-5}{10x-3}=\dfrac{5x-3}{6x+1}$ bezüglich $\mathbb{Q}$ c) $\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}=0$ bezüglich $\mathbb{R}$

d) $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x-4}-\sqrt{2x-6}-\sqrt{x-1}=0$ bezüglich $\mathbb{R}$

e) $6x^2+x-1=0$ bezüglich $\mathbb{N},\mathbb{Q},\mathbb{R}$

f) $\dfrac{1}{x^2}=0$ bezüglich $\mathbb{R}$

g) $\dfrac{2x^2-14x+6}{x-2}=0$ bezüglich $\mathbb{R}$

Überprüfe die Rechnung durch eine Probe und gib die unzulässigen Einsetzungen bezüglich der angegebenen Grundmenge an.

Aufgabe 3. Errate eine Lösung und errechne die weiteren Lösungen:

a) $x^3+3x^2-3x-1=0$ bezüglich $\mathbb{R}$

b) $x^3+7x^2-21x+6=0$ bezüglich $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$

Führe eine Probe durch.

Gleichungen höheren Grades

Aufgabe 1. Bestimme die Lösungsmenge in $\mathbb{R}$:

a) $15x^3+x^2-24x=-22x$ b) $(3x^2-20x-7)\,x^2=0$

c) $x^3-2ix^2+3x=0\quad(i=\sqrt{-1})$ d) $x^3+x^2-25x-5=20$

Aufgabe 2. Berechne die Nullstellen in $\mathbb{R}$:

a) $x^3+bx^2-a^2x-ba^2=0$ b) $x^3+14x^2+7x-78=0$

c) $x^3+x^2-20x=-2\,(x^2+10)+4x^2$

Aufgabe 3. Berechne die Nullstellen in $\mathbb{R}$:

a) $x^4 - 25x^2 + 124 = -20$ b) $2x - x^4 = x^{-2}$

c) $x^5 - 2x^4 - 26x^3 + 52x^2 + 25x - 50 = 0$ d) $x^6 + x^4 = x^2 + 1$

Aufgabe 4. Ermittle die Nullstellen durch Raten. Verwende dabei das Horner-Schema:

a) $x^3 - x^2 - 32x + 60 = 0$ b) $x^4 - 4x^3 - 39x^2 + 86x + 280 = 0$

Gleichungen mit Logarithmen und Potenzen

Aufgabe 1. Berechne die Lösungsmenge in $\mathbb{R}$:

a) $\log_a x + \log_a(x+5) - \log_a 150 = 0$, $(x > 0)$

b) $(\log_3 x)^2 - 7 = 3\log_3 x^2$, $(x > 0)$. Hinweis: Setze $z = \log_3 x$

c) $0,25^{x^2} \cdot 2^{2x-1} = \frac{1}{32}$

d) $\log_9(x+2) \cdot \log_x 3 = 1$, $(x > 0)$. Hinweis: Verwende $\log_9 3 = \log_9 x \log_x 3$ und $\log_9 9^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

14.4 Vektorrechnung

Gleichungssysteme

Aufgabe 1. Man löse nach dem Gleichsetzungsverfahren ($L \subseteq \mathbb{R}^2$):

a)
$$\begin{array}{lrcrcrcl} (1) & 2x & + & y & - & 3 & = & 0 \\ (2) & 9x & + & 3y & - & 24 & = & 0 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{lrcrcr} (1) & 3x & + & y & = & 15 \\ (2) & 5x & - & 6y & = & 2 \end{array}$$

Aufgabe 2. Man löse nach dem Einsetzungsverfahren ($L \subseteq \mathbb{R}^2$):

a)
$$\begin{array}{lrcrcr} (1) & 9x & - & 8y & = & 14 \\ (2) & 5x & - & 4y & = & 10 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{lrcrcr} (1) & x & + & 0.2y & = & -1.5 \\ (2) & 3x & - & 0.025y & = & -7 \end{array}$$

Aufgabe 3. Man löse nach dem Additions- bzw. Subtraktionsverfahren ($L \subseteq \mathbb{R}^2$).

a)
$$\begin{array}{lrcrcrcl} (1) & 3s & + & 2t & - & 5 & = & 0 \\ (2) & 3s & - & 2t & + & 1 & = & 0 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{lrcrcr} (1) & 12x & - & 20y & = & -3 \\ (2) & -9x & + & 15y & = & 2.25 \end{array}$$

Aufgabe 4. Löse folgende Gleichungssysteme ($L \subseteq \mathbb{R}$)

a)
$$\begin{array}{lrcrl} (1) & 6x & - & 4y & = 3 \\ (2) & 9x & - & 6y & = 4 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{lrcrcrcl} (1) & \sqrt{2}\,u & - & \sqrt{3}\,v & + & 1 & = & 0 \\ (2) & \sqrt{3}\,u & + & \sqrt{2}\,v & - & 2\sqrt{6} & = & 0 \end{array}$$

Aufgabe 5. Löse folgendes Gleichungssystem ($L \subseteq \mathbb{R}^2$):

(4) $$(x-6)\,(y-3) = (x-4)\,(y-4) \quad (1)$$
(5) $$(x-10)\,(y-1) = (x-9)\,(y-3) \quad (2)$$
(6)

Aufgabe 6. Löse folgende Gleichungssysteme ($L \subseteq \mathbb{R}^3$).
Hinweis: Versuche, eine Unbekannte mit Hilfe einer Gleichung aus den beiden anderen Gleichungen zu eliminieren.

a)
$$\begin{array}{lrcrcrcr} (1) & 2x & - & y & & & = & 4 \\ (2) & 3x & & & - & z & = & 6 \\ (3) & & & 2y & - & z & = & 10 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{lrcrcrcr} (1) & 2x & - & 3y & + & 5z & = & 9 \\ (2) & -x & + & 4y & - & 5z & = & -7 \\ (3) & 2x & + & 3y & - & z & = & 3 \end{array}$$

Aufgabe 7. Für welchen Wert von a besitzt das folgende Gleichungssystem eine Lösung? Man gebe die Lösung an ($L \subseteq \mathbb{R}^2$):

$$\begin{array}{lrcrcl} (1) & \frac{3}{4}x & + & \frac{5}{8}y & = & 1 \\ (2) & \frac{4}{5}x & + & \frac{2}{3}y & = & a \end{array}$$

Aufgabe 8. Anhand geometrischer Betrachtungen lege man die Höchstzahl der möglichen reellen Lösungen fest und bestimme diese:

a)
$$\begin{array}{lrcrcrcl} (1) & x & + & 3y & + & 4 & = & 0 \\ (2) & 2x & + & y^2 & + & 1 & = & 0 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{lrcrcl} (1) & x^2 - 8x & + & y^2 & = & 9 \\ (2) & 2x & - & 0.25y^2 & = & 0 \end{array}$$

Aufgabe 9. Man forme eine der folgenden Gleichungen durch Ausklammern so um, daß man ein Produkt mehrerer Ausdrücke in x und y erhält, das gleich Null ist. Dann bestimme man alle Lösungen der folgenden nicht-linearen Gleichungssysteme ($L \subseteq \mathbb{R}^2$).

a)
$$\begin{array}{lrcrcrcl} (1) & x^2 & - & yx^2 & + & y & = & 1 \\ (2) & x^2 & & & - & y & = & 0 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{lrcrcl} (1) & x^2 & & & = & \frac{27}{4}\,y \\ (2) & x^2y & + & 4y & = & 4x + xy^2 \end{array}$$

Aufgabe 10. Löse das folgende nicht-lineare Gleichungssystem

(7) $$(x-2)(x-4)(y-3) = 0 \quad (1)$$
(8) $$(x^2-4)(y+2)(x-y) = 0 \quad (2)$$
(9)

Alle Lösungen sollen durch nachträgliches Einsetzen in das Gleichungssystem überprüft werden!

Vektorrechnung

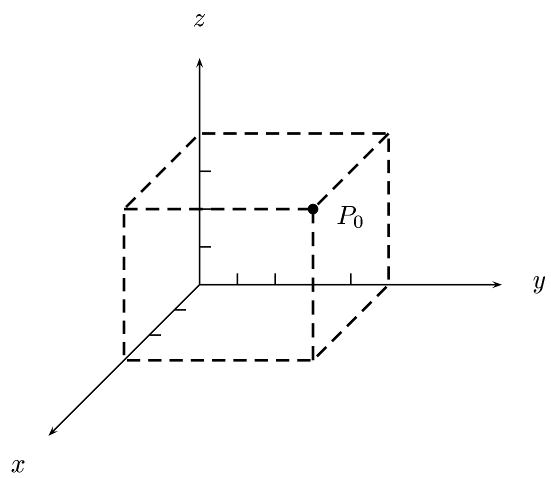
Die folgenden Punkte und Vektoren werden in den Aufgabenstellungen häufiger verwendet:

$$P = (-1, 2, 1), \qquad Q = (2, -2, 1), \qquad R = (-1, 3, -2)$$

$$\vec{a} = (1, -2, 3), \qquad \vec{b} = (-2, -2, 3), \qquad \vec{c} = (1, 0, -3)$$

Wenn Sie dort auf diese Bezeichnungen treffen, müssen Sie hier nachsehen.

Aufgabe 1. Welche Koordinaten hat der Punkt P_0 (1 Skalierungsstrich = 1 Einheit) in der folgenden Skizze?



Aufgabe 2. Welche Koordinaten hat der Punkt $P \dot{+} \vec{a}$? Berechne $\vec{m}$ so, daß $P \dot{+} \vec{m} = Q$ ist.

Aufgabe 3. Wie groß ist der Abstand von Q nach R ?

Aufgabe 4. Ergänze P, Q, R um einen Punkt X, so daß P, Q, R, X ein Parallelogramm bilden.

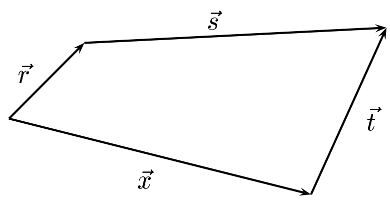
Aufgabe 5. Gegeben sind die Punkte

$$\begin{aligned} A &= (3,2,0), & B &= (0,6,0), \\ C &= (-4,3,0), & D &= (-1,-1,0), \\ E &= (3,2,5), & F &= (0,6,5), \\ G &= (-4,3,5), & H &= (-1,-1,5). \end{aligned}$$

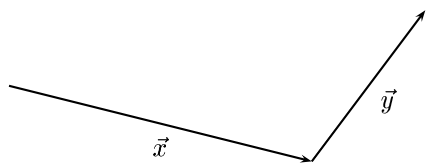
Zeige, daß die Punkte Eckpunkte eines Würfels sind.

Aufgabe 6. Berechne $3 \cdot \vec{a} - 2 \cdot \vec{b} + \vec{c}$.

Aufgabe 7. Drücke $\vec{x}$ durch eine Linearkombination von $\vec{r}, \vec{s}$, und $\vec{t}$ aus.



Aufgabe 8. Zeichne $2 \cdot \vec{y} - \frac{1}{2} \cdot \vec{x}$



Aufgabe 9. Wie muß man die Koordinaten des Punktes X wählen, damit

$$\overrightarrow{XP} + \overrightarrow{XQ} + \overrightarrow{XR} = \vec{o}$$

gilt?

Aufgabe 10. Löse folgende Gleichungen nach $\vec{x}$ auf:

(a) $$\lambda\vec{x} + \mu\vec{x} + \sigma\vec{y} = \vec{o}$$

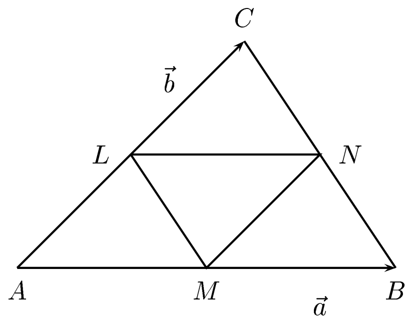
(b) $$4\,(\vec{x} - \vec{y}) - 3(\vec{x} - 2\vec{z}) = \vec{o}$$

(c) $$\lambda(\vec{x} + \vec{y}) + \mu(\vec{x} - \vec{y}) = \vec{o}$$

Aufgabe 11. Vereinfache die folgende Vektorterme:

a) $\dfrac{\vec{x}+\vec{y}}{3} + \dfrac{\vec{x}+\vec{y}}{5} + \dfrac{\vec{x}+\vec{y}}{2}$ b) $\dfrac{2}{3}(\vec{x} - \vec{y}) + \dfrac{1}{6}(2\vec{x} + 4\vec{y}) - \dfrac{1}{3}(4\vec{x} + 5\vec{y})$

Aufgabe 12. Gegeben sei das Dreieck



Zeige, daß die Seiten des Mittendreiecks L,M,N parallel zu den Seiten des Dreicks A,B,C sind.

Aufgabe 13. Gib eine Parameterdarstellung an für

a) die Gerade durch P in Richtung $\vec{a}$

b) die Gerade durch P und Q

Aufgabe 14. Sei $g:\ \vec{x} = (2,-1,1) \dotplus \lambda(1,-1,2)$

a) Berechne die Punkte von g für $\lambda = -1,-2,2$.

b) Welcher der Punkte $X = (0,1,-3)$ und $Y = (2,1,-2)$ liegt auf g?

Aufgabe 15. Gib eine Parameterdarstellung an für

a) die Ebene durch Q, aufgespannt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$

b) die Ebene durch P, Q, R.

Aufgabe 16. Berechne die Schnittpunkte der Ebene

$$E:\ \vec{x} = (4,-1,-2) \dotplus \lambda(4,1,0) + \mu(4,0,-2)$$

mit den Koordinatenachsen.

Aufgabe 17. Berechne den Durchstoßpunkt der Geraden

$$g:\ \vec{x} = (-1,0,2) \dotplus \lambda(1,0,2)$$

mit der Ebene

$$E:\ \vec{x} = (4,-6,5) \dotplus \mu(-3,4,1) + \sigma(-1,1,-2)$$

Aufgabe 18. Zeige, daß die Gerade

$$g:\ \vec{x} = (1,2,-1) \dotplus \lambda(-3,4,-4)$$

parallel zur Ebene

$$E: \vec{x} = (2,1,-4) \dotplus \mu(2,-2,1) + \sigma(1,0,-2)$$

ist und außerhalb derselben verläuft.
Hinweis: Es gibt verschiedene Möglichkeiten, diese Aufgabe zu lösen. Sucht man gemeinsame Punkte von Gerade und Ebene, so erhält man zunächst ein Gleichungssystem. Zeige, daß es unlösbar ist.

Aufgabe 19. Zeige, daß die Gerade

$$g: \vec{x} = (1,2,-2) \dotplus \lambda(1,-1,2)$$

in der Ebene

$$E: \vec{x} = (-1,4,-6) \dotplus \mu(1,1,1) + \sigma(0,-2,1)$$

verläuft.

Aufgabe 20. In einem kartesischen Koordinatensystem seien die Vektoren $\vec{x} = (0,4,2)$ und $\vec{y} = (0,2,3)$ gegeben.

a) Berechne das Skalarprodukt $\vec{x} * \vec{y}$.

b) Zeichne $\vec{x}$ und $\vec{y}$ maßstabsgetreu in ein (y,z)-Koordinatensystem. Miß die Länge von $\vec{x}$ und die Länge der Projektion von $\vec{y}$ auf $\vec{x}$. Das Produkt muß bis auf die Meßgenauigkeit $\vec{x} * \vec{y}$ sein.

Aufgabe 21. Sei $\vec{m} = (1,-4,6)$ und $\vec{n} = (3,0,-4)$. Wie groß ist die Komponente $\vec{m}_{\vec{n}}$ von $\vec{m}$ in Richtung von $\vec{n}$?

Aufgabe 22. Wie groß ist der Abstand der Geraden

$$g: \vec{x} = (1,2,-3) \dotplus \lambda(1,2,-1)$$

vom Punkt $P(2,0,-2)$?

Aufgabe 23. Gegeben seien die Vektoren $\vec{r} = (1,2,-1)$ und $\vec{s} = (1,-2,0)$.

a) Berechne den Vektor $\vec{r} \times \vec{s}$ und mach die Probe:

$$(\vec{r} \times \vec{s}) * \vec{r} = (\vec{r} \times \vec{s}) * \vec{s} = 0.$$

b) Ermittle unter Ausnutzung des Ergebnisses unter a)

$$\vec{s} \times \vec{r} \qquad \text{und} \qquad (-2,-4,2) \times (3,-6,0)$$

Aufgabe 24. Es sind mit $\vec{c} = (1, -2, 3)$ und $\vec{d} = (-1, 1, 1)$ zwei zueinander senkrechte Vektoren gegeben. Das von ihnen aufgespannte Parallelogramm ist daher ein Rechteck und für seinen Flächeninhalt gilt:

$$F = |\vec{c}| \cdot |\vec{d}| = |\vec{c} \times \vec{d}| \, .$$

Prüfe die Gleichheit durch Rechnung nach.

Aufgabe 25. Berechne eine Koordinatendarstellung der Ebene

$$E: \vec{x} = (1, 2, 1) \dot{+} \lambda(3, -1, 1) + \mu(2, 4, -1)$$

sowie ihren Abstand vom Ursprung.

Aufgabe 26. Berechne das Volumen des von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannten Spates.
Löse Aufgabe 22 mit Hilfe der geometrischen Interpretation des Vektorproduktes.

14.5 Komplexe Zahlen

Aufgabe 1. Markiere die komplexen Zahlen i, 2, $2 + 3i$, $-1 + 2i$ und $-2 - i$ in der komplexen Zahlenebene.

Aufgabe 2. Berechne sowohl analytisch als auch graphisch durch Vektoraddition $(2 + 3i) + (3 + i)$.

Aufgabe 3. Berechne
a) $|3 - 4i|$ b) $\overline{3 - i}$ c) $(2 + 2i) \cdot (1 - i)$ d) $\frac{2-i}{1+i}$ e) $\overline{(4 + i) \cdot (-3 + 2i)}$.

Aufgabe 4. Besitzt $f \mid \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -7x^5 + 3x^2 + 100$ eine reelle Nullstelle?

14.6 Funktionen

Aufgabe 1. Stelle folgende Funktionen graphisch dar. Wie lautet der Definitionsbereich?

(a) $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$ (b) $f(x) = \dfrac{2x}{1 - x^2}$ (c) $f(x) = \lg(1 - x)$

(d) $$f(x) = \begin{cases} -x & \text{für } -1 \leq x < 0 \\ +x & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ -x + 2 & \text{für } 1 \leq x < 2 \\ +x - 2 & \text{für } 2 \leq x < 3 \\ -x + 4 & \text{für } 3 \leq x < 4 \\ +x - 4 & \text{für } 4 \leq x < 5 \end{cases}$$

(e) $$f_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{für } a < x < +\infty \end{cases} \qquad 0 < a \in \mathbb{R}, \text{ bel.}$$

Aufgabe 2. Konstruiere eine Skizze aus der Überlagerung bekannter Kurvenverläufe:
a) $f(x) = 2x^3 - x + 1$ b) $f(x) = -x^2 + \sqrt{x}$ auf $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$

Aufgabe 3. Stelle folgende Funktionen dar:

a) $y|\mathbb{N} \to \mathbb{N},\ \ y(x) = x^2$ b) $y|\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ y(x) = x^2$

Aufgabe 4. Untersuche, ob die folgenden Funktionen $y|\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ surjektiv, injektiv oder bijektiv sind. Falls eine Funktion nicht bijketiv ist, versuche, einen Definitionsbereich und einen Wertebereich so anzugeben, daß die Funktion bijektiv wird.

a) $y = x^2$ b) $y = \sin x$ c) $y = e^x$

Aufgabe 5. Stelle eine Zuordnungsvorschrift auf:

a)

D	1	2	3	4	6	9	...
W	1	1.41	1.73	2	2.45	3	...

b)

D	0.1	1	2	4	20	400	...
W	-1	0	0.301	0.602	1.301	2.602	...

c)

D	0	0.5	0.8	$\pi/2$	2π	5π
W	1	0.8775	0.6987	0	1	-1

Aufgabe 6.

a) Bestimme eine lineare Funktion, die das Intervall $[2, 4]$ in das Intervall $[1, 2]$ überführt und die dazugehörige Umkehrfunktion.

b) Gib eine Funktion an, die das Intervall $(0, 1]$ auf $[1, \infty)$ abbildet.

Aufgabe 7. Löse folgende implizite Funktionen nach y auf und gib jeweils den Definitionsbereich an.
a) $-4xy + 6x\,(y + 1) = 2$ b) $y^2x + y\,(x^2 + 1) = y\,(1 + 2xy), \quad xy \neq 0$
c) $yx + y = x + 3 + y + \dfrac{2 + y}{x}$

Aufgabe 8. Entwickle aus der Parameterdarstellung die explizite Funktion und gib den Definitionsbereich an.

a) $x = +\sqrt{t}$, $y = t^2 + 3t + 2$ b) $x = t - 2$, $y = t^3 - 4t^2 + t$

c) $x = e^t$, $y = \ln t - 3t + 5e^t$

Aufgabe 9. Gib für folgende Kurven eine Parameterdarstellung an:

a) $y = 6x^2 + 48x + 98$ b) $x^2 + y^2 = 1$ Hinweis: Benutze triginometrische Funktionen

Aufgabe 10.

a) Führe für $y = x^2 + 4x + 5$ folgende Koordinatentransformation durch: $x = x' - 2$, $y = y' + 1$.

b) Welche Koordinatentransformation führt $y = x^2 + 8x + 18$ auf $y' = x'^2$ Hinweis: Führe eine quadratische Ergänzung durch.

Gerade, Ungerade, Monotonie

Aufgabe 1. Untersuche, ob folgende Funktionen gerade oder ungerade sind:

a) $y = \dfrac{x}{2}$ b) $y = x^2 + x$ c) $y = -\frac{1}{x}$ d) $y = -\frac{1}{x^2}$

e) $y = |x|$ f) $y = \dfrac{x^3 + 1}{x^3 - 7}$ g) $y = e^x$ h) $y = x^4 + 7x^2 + 8$

i) $y = 7^{\frac{x}{2}}$ k) $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 8}$

l) $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad n \in \mathbb{N},\ a_i \in \mathbb{R},\ a_n \neq 0$

m) $y = \dfrac{1}{x^7 + x^3 + 4}$ n) $y = \dfrac{1}{x^2\left(x^5 + x + \frac{6}{x}\right)}$ o) $y = x + |x|$ p) $y = \sin x$

q) $y = \sin 2x$ r) $y = \sin x^2$

Aufgabe 2. Welche Aussage ist bei den Funktionen a) , b) , c) , g) , i) , o) und p) aus Aufgabe 1 in Bezug auf Monotonie möglich?

Aufgabe 3. Berechne die Umkehrfunktion:

a) $y = \frac{1}{2}x - 1$ b) $y = \frac{1}{2}x + 1$ c) $y = \frac{1}{x}$

d) $y = x^{2n}, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ e) $y = x^{2n-1}, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ f) $y = a^x$

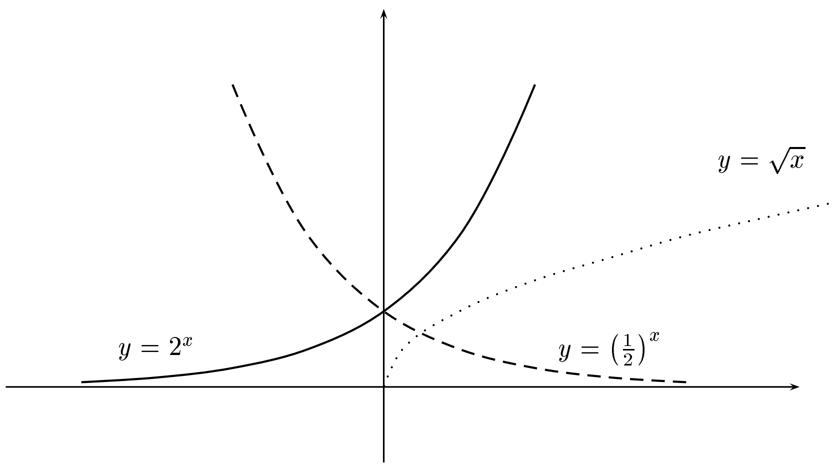
g) $y = x^3 + x^2, \quad x \geq 0$ h) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}, \quad x > -1$ i) $y = 3 \lg x, \quad x > 0$

k) $y = \lg 3x, \quad x > 0$ l) $y = \lg 2x - \lg 2, \quad x > 0$ m) $y = \sqrt{16 - 4x^2}$

n) $y = \sqrt{4x^2 - 16}$ o) $y = x^2, \quad x \leq 0$ p) $y = -\sqrt{x}, \quad x \geq 0$

q) $y = \sqrt[3]{x}$

Aufgabe 4. Bestimme zeichnerisch die Umkehrfunktion:



14.7 Graphische Lösung von Gleichungen und Ungleichungen

Aufgabe 1. Man löse die Gleichung $x^3 - 12x^2 + 41x - 40 = 0$ durch Ablesen der Nullstellen des Graphen von $f(x) = x^3 - 12x^2 + 41x - 40$.

Aufgabe 2. Man löse graphisch eine Gleichung mit einer Unbekannten durch Bestimmen der Schnittpunkte von $f(x)$ und $g(x)$:

$$(1 - e^x)(x - 1)^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad 1 - e^x = \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$f(x) = 1 - e^x, \qquad g(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$$

Aufgabe 3. Man bestimme graphisch und rechnerisch die Lösung einer Ungleichung mit einer Unbekannten:

a) $\dfrac{2x}{1 - x^2} > 1$ b) $\dfrac{3x}{x^3 - 1} < x$

Aufgabe 4. Man bestimme graphisch die Lösung der folgenden Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten:

a) $$\begin{array}{lrcl} (1) & y & = & \lg x \\ (2) & y^2 & = & 2x - x^2 \end{array}$$

b) $$\begin{array}{lrcl} (1) & y & = & 1 - x^2 - 2x \\ (2) & y & = & e^x \end{array}$$

Aufgabe 5. Man bestimme graphisch die Lösung der folgenden Ungleichungssysteme mit zwei Unbekannten:

a) $$\begin{array}{lrcl} (1) & x^2 - 6x + y^2 - 8y & \geq & 0 \\ (2) & x^2 - 6x & \leq & y \\ (3) & y & < & x \end{array}$$

b) $$\begin{array}{lrcl} (1) & (x-3)\,(y+4) & \geq & 0 \\ (2) & x^2 - 6x + y^2 + 8y & \leq & -16 \\ (3) & x - 7 & < & y \end{array}$$

14.8 Folgen, Reihen, Grenzwerte

Aufgabe 1. Die ersten zwei Glieder einer arithmetischen Folge sind 13 und 8. Wie groß ist das siebte Glied und die Summe der ersten sieben Glieder?

Aufgabe 2. Von einer arithmetischen Reihe sind $a_1 = \frac{10}{3}$, $d = \frac{4}{3}$ und $s_n = 448$ bekannt. Bestimme n und a_n.

Aufgabe 3. Eine arithmetische Folge ist gegeben durch $a_1 = 1$ und $d = 6$. Ab welchem Index n gilt $a_n > 10^4$?

Aufgabe 4. Bestimme — falls möglich — folgende Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{2n}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{n+2}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+10}{n^3}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{-n}$ e) $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(n-1)$ f) $\lim\limits_{n\to\infty} \cos \frac{1}{n}$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n + \sqrt{n+1}}{n+1}$ h) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3} \cdot \left(1 - (-\frac{5}{8})^n\right)$ i) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(3 + \dfrac{\cos(x \cdot \frac{\pi}{4})}{x^2}\right) \cdot \dfrac{2x}{x-1}$

j) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6 + 5 \cdot 10^n}{3 + 2 \cdot 10^n}$ k) $\lim\limits_{n\to\infty} (+\sqrt{n^2+n} - n)$

Aufgabe 5. Eine geometrische Reihe ist gegeben durch $a_1 = -1.5$ und $q = -2$. Ferner sei $s_n = 127.5$. Bestimme n und a_n.

Aufgabe 6. Wie groß ist die Summe aller Potenzen von 2 mit den Exponenten $n = 1$ bis $n = 10$?

Aufgabe 7. In einer geometrischen Folge ist das zweite Glied 6, und die Summe des dritten und des vierten Gliedes beträgt 72. Bestimme a_1 und q.

Aufgabe 8. Wieviele Glieder der Folge 5, 10, 20, ... ergeben als Summe 5115?

Aufgabe 9. Schalte zwischen je zwei Glieder der Folge 3, 17, 31, ... sechs weitere Glieder, so daß wieder eine arithmetische Folge entsteht.

Aufgabe 10. Von einer geometrischen Folge sind $a_1 = \frac{2}{3}$ und $a_{10} = 13122$ bekannt. Bestimme q.

Aufgabe 11. Ein antikes Amphitheater umfaßt 20 Sitzreihen. In der ersten Sitzreihe haben 50 Personen Platz. Jede folgende Reihe bietet 5 Sitzplätze mehr als die vorhergehende. Wieviele Zuschauer kann das Theater aufnehmen?

Aufgabe 12. Zwischen je zwei Glieder der Folge 32, 1, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{1024}$, ... sollen vier weitere Glieder eingeschaltet werden, so daß wieder eine geometrische Folge entsteht.

Aufgabe 13. Schalte zwischen je zwei Glieder der Folge 16, 36, 81, ... ein weiteres Glied so ein, daß wieder eine geometrische Folge entsteht.

Aufgabe 14. Es sei $a_1 \neq 0$. Bestimme

$$\lim_{n\to\infty} a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

für $|q| < 1$ und berechne damit

a) $32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 + 0.5 + \cdots$ b) $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \cdots$

c) $1 + 0.4 + 0.16 + 0.064 + \cdots$ d) $64 + 8 + 1 + \frac{1}{8} + \cdots$

Aufgabe 15. Berechne folgende Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(a+n)^2}{a^2+n^2}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-2n+1}{n^2+n+1}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2\sqrt{n}}{3n-\sqrt{n}}$ e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^2-1}{3n^2+n}$

14.9 Grenzwerte von Funktionen

Aufgabe 1. Berechne

a) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^4-10x^2+9}{x^4-8x^2-9}$ b) $\lim\limits_{x\to 1\pm 0} \frac{x-1}{x^2-2x+1}$

14.10 Trigonometrische Funktionen

Aufgabe 1. Skizziere folgende Funktionen im Bereich $0 \leq x \leq 2\pi$:

a) $y = \sin x$ b) $y = \sin 2x$ c) $y = 2\sin x$

d) $y = \sin x + \frac{\pi}{2}$ e) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

Aufgabe 2. Man mache sich die Eintragungen in der Vorzeichentabelle am Einheitskreis klar:

	I	II	III	IV
sin	$+$	$+$	$-$	$-$
cos	$+$	$-$	$-$	$+$
tan	$+$	$-$	$+$	$-$
cot	$+$	$-$	$+$	$-$

Aufgabe 3. Bestimme mit Hilfe der Tabelle (Skript Seite 79)

a)	$\sin 120°$	b)	$\sin 240°$	c)	$\sin 300°$
d)	$\cos 210°$	e)	$\tan 210°$	f)	$\cos 330°$

Aufgabe 4. Es besteht eine zweite Möglichkeit zur Rückführung auf spitze Winkel mit Hilfe der folgenden Tabelle:

	$90° - \alpha$	$90° + \alpha$	$270° - \alpha$	$270° + \alpha$
sin	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
cos	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
tan	$\cot\alpha$	$-\cot\alpha$	$\cot\alpha$	$-\cot\alpha$
cot	$\tan\alpha$	$-\tan\alpha$	$\tan\alpha$	$-\tan\alpha$

Berechne hiermit

a) $\sin 120°$ b) $\tan 120°$ c) $\cot 210°$ d) $\cos 330°$ e) $\cot 330°$

Aufgabe 5. Überprüfe die folgenden Additionstheoreme (die für beliebige Winkel gelten) am rechtwinkligen Dreieck:

a)	$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$	b)	$\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha}$
c)	$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$	d)	$\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$

Aufgabe 6. Leite aus den jeweils gegebenen Formeln eine andere her:

a) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \quad \Longrightarrow \quad \sin 2\alpha =$

b) $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right) \quad \Longrightarrow \quad \sin^2\alpha =$

c) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \Longrightarrow \quad \cos 2\alpha =$

Aufgabe 7. Bei den meisten Beziehungen zwischen trigonometrischen Funktionen desselben Arguments treten positive und negative Vorzeichen auf. Für welche Winkel α gilt jeweils das „+“ bzw. das „−“ Zeichen?

a) $\cos\alpha = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$ b) $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$

Aufgabe 8. Die trigonometrischen Funktionen sind periodische Funktionen. Die Funktionen $y = \cos x$ und $y = \sin x$ haben die Periode 2π. Bestimme (ohne Zeichnung) die Perioden folgender Funktionen:

a) $y = \cos 2x$ b) $y = 2\cos x$ c) $y = \sin x + \frac{\pi}{2}$

d) $y = \sin(2x + \frac{\pi}{2})$ e) $y = \sin\frac{x}{2}$ f) $y = \sin 2x$

Aufgabe 9. Ermittle die Asymptoten und die Periode der Funktionen $y = \tan x$, $y = \cot x$, $y = \tan\frac{x}{2}$ und $y = \cot 2x$.

14.11 Technik des Differenzierens

Aufgabe 1. Untersuche folgende Funktionen auf Differenzierbarkeit in x_0 durch Bilden des rechts- und linksseitigen Grenzwertes

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

a) $f(x) = x^2$, $x_0 = 0,\ x \in \mathbb{R}$

b) $f(x) = \sqrt{3}\,x^5$, $x_0 = 0,\ x \in \mathbb{R}$

c) $f(x) = 2\tan x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}\ \ x \in \mathbb{R}$

d) $f(x) = \sqrt{|x|}$, $x_0 = 0,\ x \in \mathbb{R}$

e) $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x_0 = 1,\ x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

f) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x+2}$, $x_0 = 2,\ x \in \mathbb{R}\setminus\{-2\}$

Aufgabe 2. Differenziere folgende Funktionen:

a) $y = x^5$ b) $y = x^{-3}$ c) $y = \dfrac{1}{x^2}$ d) $y = x^{\frac{3}{8}}$ e) $y = \sqrt[4]{x^5}$

Aufgabe 3. Differenziere nach den Grundregeln (a) – (c) (Skript Seite 84)

a) $y = 6x^2 + 4x - 3$ b) $y = abx^6 - bx + a^2b$ c) $y = 5x^{-2} + 3\sqrt{x^3}$

d) $y = 6\sin x - 3\cos x + 2$ e) $y = \tan x + a\cos x + 7e^x$

Aufgabe 4. Wende bei der Differentiation die Produkt- bzw. Kettenregel an.

a) $y = (4x + 7)(3x^2 - 6)$ b) $y = \dfrac{4x}{x^2 + 1}$ c) $y = \dfrac{x^4(x^5 - 3x)}{x - 8}$

d) $y = \dfrac{x \ln x}{e^x}$ e) $y = \dfrac{\sqrt{x}(x + 3) - 3\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$ f) $y = \tan x \cdot \sin x$

g) $y = \dfrac{\cot x}{2 \cdot \sin x \cdot \cos x}$

Aufgabe 5. Benutze die Kettenregel beim Differenzieren:

a) $y = (2x^2 - 6x + 13)^3$ b) $y = \sqrt{27x - 3x^4}$ c) $y = \cot 4x^3$

d) $y = \ln \sqrt{\tan 2x + 9x^6}$ e) $y = e^{2x} \cdot \ln 26$ f) $y = e^{2\cos x} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{1}{2\sin^2 x}}$

g) $y = \dfrac{e^{ax}}{a^2(1 + ax)}$ h) $y = \dfrac{1}{2a} \cot \frac{ax}{2} - \dfrac{1}{6a} \cot^3 \frac{ax}{2}$ i) $y = \dfrac{1}{3} \ln \dfrac{3 + \sqrt{9 - x^2}}{x}$

k) $y = \ln \dfrac{a^2 + x^2}{x^3}$

Aufgabe 6. Differenziere

a) $y = x \cdot 10^x$ b) $y = 2^{\cos x}$ c) $y = 2ab^{2x-1}$ d) $y = (\tan x)^x$

e) $y = \log_2 x$ f) $y = \log_3 10$ g) $y = \frac{1}{x^2} \cdot \log_5 x$

14.12 Anwendung der Differentialrechnung

Aufgabe 1. Berechne folgende Grenzwerte mit Hilfe der Regel von de L' Hospital:

a) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^4 - 10x^2 + 9}{x^4 - 8x^2 - 9}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x + \dfrac{x^2}{2} - 1}{x^4}$

Aufgabe 2. Unter vollständiger Einbeziehung einer Mauer von 10m Länge und 50m Draht soll ein möglichst großes Rechteck eingezäunt werden.

14.13 Technik des Integrierens

Aufgabe 1. Berechne die folgenden Integrale

a) $\displaystyle\int \left(\frac{2}{3x^5} + 7x^4\right) dx$ b) $\displaystyle\int \left(\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$

c) $\displaystyle\int \left(5\sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{\sqrt[4]{5x^3}}\right) dx$ d) $\displaystyle\int \frac{(x^2 - 1)^3}{x} dx$

e) $\displaystyle\int \frac{3 + 5\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^3}} dx$ f) $\displaystyle\int (3 + 2\sqrt[4]{x})^3 dx$

Aufgabe 2. Berechne die folgenden Integrale

a) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{a+b\cos x}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{x^{n-1}}{a+bx^n}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+a}\,dx$ e) $\displaystyle\int \frac{x}{a+bx^2}\,dx$ f) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x\cdot\sin x}$

Aufgabe 3. Berechne die folgenden Integrale

a) $\displaystyle\int \ln|x|\,dx$ b) $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx$ c) $\displaystyle\int x^3 e^x\,dx$

d) $\displaystyle\int e^x \sin x\,dx$ e) $\displaystyle\int \sin x\cdot\cos x\,dx$ f) $\displaystyle\int \sin^3 x\,dx$

Aufgabe 4. Berechne die folgenden Integrale

a) $\displaystyle\int \frac{\ln|x|}{x}\,dx$ b) $\displaystyle\int \sin ax\,dx$ c) $\displaystyle\int e^{mx}\,dx$

d) $\displaystyle\int a^x\,dx$ e) $\displaystyle\int (a+bx)^n\,dx$ f) $\displaystyle\int \sqrt{a+bx}\,dx$

15 Lösungen

15.1 Terminologisches

Lösung 1

a) wahr b) wahr, denn $x^2 = x$ hat genau zwei Lösungen.

c) falsch, denn 2 ist eine gerade Primzahl.

Lösung 2

trivial !

Lösung 3

a), c) und d) definieren Mengen.

Lösung 4

a) $\{2, 4\}$ b) $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ c) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

d) $\{5, 6, 7, 8\}$ e) $\{11, 13, 17, 19, 23\}$ f) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

Lösung 5

a) $\{x \mid 1 < x < 7, x \in \mathbb{N}\} = \{x \mid 2 \leq x \leq 6, x \in \mathbb{N}\}$

b) $\{x \mid 3 \leq x \leq 13, x \text{ Primzahl}\}$

c) $\{x \mid x \text{ gerade}, x \in \mathbb{N}\} = \{x \mid x = 2a, a \in \mathbb{N}\}$

d) $\{x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ Teiler von } 24\}$

Lösung 6

a) $\{2, 4, 6, \ldots\} = \{x \mid x = 2a, a \in \mathbb{N}\}$

b) $\{5\} = \{x \mid x + 5 = 10, x \in \mathbb{Z}\}$

c) $\{4, 8, 12, 16\} = \{x \mid x < 20, x = 4a, a \in \mathbb{N}\}$

Lösung 7

b) und c) sind falsch, denn 4 ist keine Primzahl und 0 keine natürliche Zahl.

Lösung 8

a) $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ b) $\{1, 2, 3, 5, 7\}$ c) $\{1, 2, 3, 4, 6\}$

Lösung 9

a) $\{c, d\}$ b) $\{4, 8\}$ c) $\{2, 3, 5\}$ d) $\{2\}$

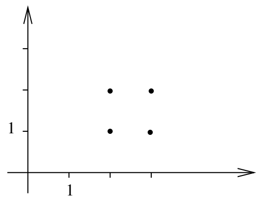
Lösung 10

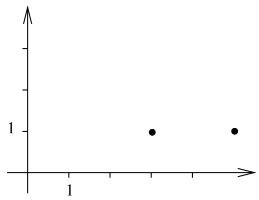
a) $A \times B = \{(2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$

b) $A \times B = \{(a, b), (a, h), (a, n), (o, b), (o, h), (o, n)\}$

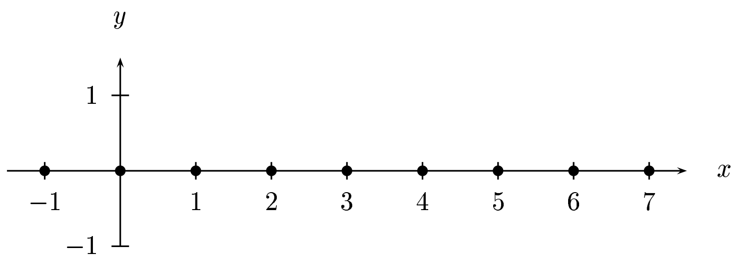
d) $A \times B = \{(2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (5, 1), (5, 2), (6, 1), (6, 2)\}$

e) $A \times B = \{(3, 1), (5, 1)\}, A = \{3, 5\}, B = \{1\}$

c) 

e) 

Lösung 11



15.2 Zahlen

Bruchrechnen

Lösung 1

a) $\frac{8}{15}$ b) $\frac{8}{13}$ c) $\frac{103}{570}$ d) $\frac{3}{7}$ e) $\frac{713}{783}$ f) $\frac{4505}{7848}$

Lösung 2

a) $\text{ggT} = 154 \Rightarrow \frac{8}{15}$ b) $\text{ggT} = 37 \Rightarrow \frac{3}{5}$ c) $\text{ggT} = 18 \Rightarrow \frac{15}{28}$

d) $\text{ggT} = 144 \Rightarrow \frac{1}{5}$ e) $\text{ggT} = 105 \Rightarrow \frac{3}{11}$

Lösung 3

a) $\text{ggT} = 4725 \Rightarrow \frac{7}{4}$ b) $\text{ggT} = 24 \Rightarrow \frac{6}{7}$

Lösung 4

a) 4347 b) 6545 c) $\frac{17}{30} < \frac{5}{8}$ d) $\frac{1}{24} < \frac{5}{32} < \frac{3}{16} < \frac{17}{48} < \frac{5}{12}$

Lösung 5

a) $\frac{35}{24}$ b) $\frac{71}{162}$

Lösung 6

a) $\frac{7}{40}$ b) $\frac{51}{4}$ c) $222\frac{10}{11}$ d) $\frac{26}{3}$ e) $\frac{22}{45}$ f) $\frac{25}{27}$ g) 450

Lösung 7

a) $\frac{5}{1456}$ b) $\frac{157}{22}$ c) $\frac{1}{20}$

Lösung 8

a) $\frac{92}{65}$ b) $\frac{219}{290}$ c) $\frac{95}{7}$ d) $\frac{69}{181}$ e) $\frac{33}{109}$

Dezimalzahlen, Dualsystem, Potenzen

Lösung 1

a) 0.63 b) 0.0002 c) 0.00275038 d) 2.75368

Lösung 2

a) 0.125 b) 0.775 c) 0.046875 d) 0.3 e) 0.00390625

Lösung 3

a) $0.\overline{285714}$ b) $1.41\overline{6}$ c) $0.4\overline{230769}$ d) $0.\overline{90}$

Lösung 4

a) $\frac{8}{25}$ b) $\frac{63}{10000}$ c) $17\frac{62007}{10000000}$ d) $11\frac{1}{250}$ e) $\frac{89}{125000}$

Lösung 5

a) $\frac{3}{11}$ b) $\frac{253}{999}$ c) $0.3\overline{58} = 0.3 + \frac{1}{10} \cdot 0.\overline{58} = \frac{71}{198}$

d) $2\frac{1}{3}$ e) $0.\overline{9} = 1$ f) $23.005\overline{7} = 23 + \frac{5}{1000} + \frac{1}{1000} \cdot 0.\overline{7} = 23\frac{13}{2250}$

Lösung 6

a) 101101 b) 100110001 c) 10000000000 d) 1001001010

Lösung 7

a) $10001100 = 2^7 + 2^3 + 2^2 = 128 + 8 + 4 = 140$

b) 1367 c) 257 d) 50

Lösung 8

a) $7776x^5y^5$ b) $-25a^2$ c) $25a^2$ d) $3^{-3}z^3q^{-3}$ e) $2^{24}(2a)^{40}$

Lösung 9

a) 216 b) 1944 c) $40u^{12}$ d) $0.24a^{4n+9}b^{m+2}x^{n+7}$

Lösung 10

a) $-27s^6$ b) a^{47} c) 6561 d) 43046721

Lösung 11

a) v^6 b) a^4 c) x^{a+b} d) $\left(\dfrac{2s^4 - 3r^6}{r^6s^4}\right)^2$ e) $\dfrac{1}{q^{n+1}}$

Lösung 12

a) $(xy)^3$ b) $9b^{-6}c$

Lösung 13

a) $\sqrt[3]{25}$ b) $\dfrac{1}{3}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$ d) $u^5\sqrt[10]{u^9}$

Lösung 14

a) $x^{\frac{2}{5}}$ b) $x^{\frac{2}{5}}$ c) $u^{-\frac{4}{3}}$ d) $z^{-\frac{m}{n}}$

Lösung 15

a) 3 b) $11\sqrt{5}$ c) $a^2\sqrt[n]{a}$ d) 3 e) $3ab^2\sqrt[3]{a}$

Lösung 16

a) $2\sqrt{3}$ b) $\dfrac{\sqrt{15}}{9}$ c) $\dfrac{2\sqrt[3]{3}}{3}$ d) $\sqrt{a}$ e) $\sqrt[7]{x^4}$

Lösung 17

a) $0 \leq x < \infty$ b) $0 \leq x < \infty$ c) $-\infty < x < \infty$ d) $0 \leq x < \infty$

e) $-\infty < x < \infty$ f) $-\infty < x < \infty$ g) $-\infty < x \leq 1$ h) $a \leq x < \infty$

i) $-\infty < x < \infty$ j) $-\infty < x < \infty$ k) $0 \leq x < \infty$

Bruchrechnen mit Zahlensymbolen

Lösung 1

a) $\dfrac{6a^2+5b^2}{36ab^2}$ b) $\dfrac{m-2n}{m+n}$ c) $\dfrac{-5}{2pn}$

d) $\dfrac{a-5}{5a}$ e) $-\dfrac{x^2+xy+y^2}{xy}$ f) $\dfrac{2(a+b)}{a}$

Lösung 2

a) $\dfrac{4}{9x^{m+1}}$ b) $\dfrac{1}{2x^{n+2}}$ c) $\dfrac{b}{a(a-b)}$

d) $\dfrac{11x}{30(x+2)}$ e) $\dfrac{3x+3-2x^3-4x^2}{6(x-1)x^2} = -\dfrac{2x^2+6x+3}{6x^2}$

Lösung 3

a), b) und d) sind identisch und c) nicht.

Lösung 4

a) $\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^3$ b) $\dfrac{(a-2b)^2}{9ab}$ c) $-\dfrac{b}{a}$

Lösung 5

a) $n^4-n^3m+n^2m^2-nm^3+m^4$ b) $-2.4x+0.3$

c) x^2+2x d) $x^2+2xy-y^2$ e) $x^2-2x+2-\dfrac{1}{x-2}$

f) $12a^2-7ab-10b^2$ g) $3a^2-ab-4b^2$ h) $a^3-a^2b+ab^2-b^3$

Lösung 6

a) $-\dfrac{(3a^n+1)}{a}$ b) $\dfrac{x^m-y^s}{x^{3+m}+x^3y^s}$

Summen- und Produktzeichen, $\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{m}}$

Lösung 1

a) $\binom{49}{3} = \dfrac{49\cdot 48\cdot 47}{1\cdot 2\cdot 3} = 18424$ b) 210 c) 210 d) 6

Lösung 2

a) 49 b) $-b^5 + ab^4 - a^2b^3 + a^3b^2 - a^4b$ c) $y^3 + 3xy^2 + 3x^2y + x^3$

d) $\frac{x^2}{1^2} + \frac{-x^3}{2^3} + \frac{x^4}{3^4} + \frac{-x^5}{4^5}$ e) $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 121$ f) $-\left(\frac{3}{1}\right)^3 + \left(\frac{3}{2}\right)^5 - \left(\frac{3}{3}\right)^7$

g) 36 h) 35 i) $1 + 1\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120}$

k) 16 l) $\sqrt{6}$ m) $\frac{121}{12}$

Lösung 3

a) $\sum\limits_{l=1}^{8} l^2$ b) $\sum\limits_{k=1}^{9} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k}$ c) $\sum\limits_{v=0}^{5} z^{5-v} \cdot x^v \binom{5}{v}$

d) $\sum\limits_{m=0}^{3} 3^m$ e) $\sum\limits_{n=0}^{4} (-1)^n 4^n$

Lösung 4

a) 14400 b) 110592 c) 0 d) 0 e) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[5]{4}$

Lösung 5

a) $\prod\limits_{k=1}^{n} k$ b) $\frac{\prod\limits_{l=1}^{49} 1}{\prod\limits_{l=1}^{3} l \cdot \prod\limits_{l=1}^{46} l}$ c) $\prod\limits_{m=1}^{n} \sqrt{m}$ d) $\frac{\prod\limits_{n=1}^{10} n}{\prod\limits_{n=1}^{5} n \cdot \prod\limits_{n=1}^{5} n}$

Logarithmen

Lösung 1

Alle Aussagen von a) - i) sind richtig.

Lösung 2

a) 2.60595 b) $0.60595 - 3$ c) 1.53532 d) 5.60595

e) $0.21190 - 3$ f) $0.39405 - 1$ g) $0.80298 - 1$ h) 1.30297

Lösung 3

a) 1.20412 b) 2.30103 c) $0.39794 - 1$ d) 1.80618

e) $0.69897 - 1$ f) 0.15051 g) 3.0103

Lösung 4

a) $-\infty < x < 1$ b) $-\infty < x < +\infty, x \neq 0$ c) $x < 0$

d) $-\infty < x < 1$ e) $-1 < x < 1$ f) $1 < |x|$

Lösung 5

a) $x = 5$ b) $x = 2$ c) $x = \frac{1}{8}$

d) $x = 0.23138$ e) $x = 0.699$ f) $x = 0$

Lösung 6

a) $x = 32$ b) $x = 46656$ c) $x = 4$ d) $x = 5$

e) $x = 1024$ f) $x = 3$ g) $x = \frac{1}{7}$ h) x beliebig

Lösung 7

a) $(\lg a + 2\lg b - \lg c) : 2$ b) 0.45154 c) $0.9 - 1$

d) $1.30103 : 2 + 0.60595 : 2 + 0.30103 \cdot 6 = 2.75966$

15.3 Gleichungen

Lösung 1

a) $\sqrt{x-a} - b \Leftrightarrow \sqrt{x-a} = b \Rightarrow x - a = b^2$

b) $a\sqrt{bx+c} - d\sqrt{ex+f} = 0 \Rightarrow a^2(bx+c) = d^2(ex+f) \Leftrightarrow$
$x(a^2b - d^2e) + a^2c - d^2f = 0 \Leftrightarrow$ (für $a^2b - d^2e \neq 0$)
$$x + \frac{a^2c - d^2f}{a^2b - d^2e} = 0$$

c) $\sqrt{x+5} - \sqrt{2x+3} = 1 \Rightarrow x + 5 = 1 + 2\sqrt{2x+3} + 2x + 3$
$\Leftrightarrow 1 - x = 2\sqrt{2x+3} \Rightarrow x^2 - 10x - 11 = 0$

d) $\sqrt{x + 2 + \sqrt{2x+7}} = 4 \Rightarrow \sqrt{2x+7} = 14 - x$
$\Rightarrow x^2 - 30x + 189 = 0$

e)

$$\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}} = \frac{1}{\sqrt{2x+10}} \qquad \overset{x \neq -5}{\Leftrightarrow}$$

$$\sqrt{(x-3)(2x+10)} = \sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} \qquad \Rightarrow$$

$$2x^2 + 2x - 32 = -2\sqrt{x^2+2x-3} \qquad \Rightarrow$$

$$x^4 + 2x^3 - 32x^2 - 34x + 259 = 0$$

f)

$$\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{x}}{\sqrt{3x+1}} = \sqrt{6x-1} \qquad \overset{x \neq -\frac{1}{3}}{\Leftrightarrow}$$

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{x} = \sqrt{(6x-1)(3x+1)} \qquad \Rightarrow$$

$$-2\sqrt{x^2+4x} = 18x^2 + x - 5 \qquad \Rightarrow$$

$$4x^2 + 16x = 324x^4 + 36x^3 - 179x^2 - 10x + 25 \qquad \Leftrightarrow$$

$$324x^4 + 36x^3 - 183x^2 - 26x + 25 = 0$$

Lösung 2

a) $\mathcal{L} = \{x | x \in \mathbb{N} \text{ und } x^2 + x - 56 = 0\} = \{7\}$

b) $\mathcal{L} = \left\{x | x \in \mathbb{Q} / \left\{\frac{3}{10}, -\frac{1}{6}\right\} \text{ und } \frac{7x-5}{10x-3} = \frac{5x-3}{6x+1}\right\} = \left\{1, \frac{7}{4}\right\}$

c) (Bem.: $x = 1$ nicht zul.) $\mathcal{L} = \{-3\}$

d) Nach Umformen ergibt sich: $x_1 = 5, x_2 = \frac{3}{7}$
Die Probe ergibt, daß $\frac{3}{7}$ keine Lösung ist. $\mathcal{L} = \{5\}$

e) $\mathcal{L}_{\mathbb{N}} = \emptyset$; $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}} = \mathcal{L}_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}$

f) $\mathcal{L} = \emptyset$

g)
$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \{x | x \in \mathbb{R} \text{ und } x \neq 2 \text{ und } 2x^2 - 14x + 6 = 0\} \\ &= \left\{\frac{7}{2} + \sqrt{\frac{37}{4}}, \frac{7}{2} - \sqrt{\frac{37}{4}}\right\}\end{aligned}$$

Lösung 3

a) Durch Raten findet man: $x_1 = 1$
Durch Polynomdivision erhält man: $x^2 + 4x + 1 = 0$
Daraus ergeben sich: $x_2 = -2 + \sqrt{3},\ x_3 = -2 - \sqrt{3}$
$\mathcal{L} = \{1, -2 + \sqrt{3}, -2 - \sqrt{3}\}$

b) Durch Raten findet man: $x_1 = 2$
Durch Polynomdivision erhält man: $x^2 + 9x - 3 = 0$
Daraus ergeben sich: $x_2 = -\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{81}{4} + 3},\ x_3 = -\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{81}{4} + 3}$
$\mathcal{L}_{\mathbb{N}} = \{2\},\ \mathcal{L}_{\mathbb{R}} = \left\{2, -\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{81}{4} + 3}, -\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{81}{4} + 3}\right\}$

Gleichungen höheren Grades

Lösung 1

a) $15x^3 + x^2 - 2x = 0 \ \Rightarrow\ (15x^2 + x - 2)x = 0$
$\mathcal{L} = \left\{-\frac{2}{5}, 0, \frac{1}{3}\right\}$

b) $\mathcal{L} = \left\{-\frac{1}{3}, 0, 7\right\}$

c) $x^3 - 2ix^2 + 3x = 0$
$x(x^2 - 2ix + 3) = 0$
$\mathcal{L} = \{0, -i, 3i\}$

d) $x^3 + x^2 - 25x - 25 = 0$
$(x^3 - 25x) + (x^2 - 25) = 0$
$x \cdot (x^2 - 25) + 1 \cdot (x^2 - 25) = 0 \quad \Rightarrow$
$\mathcal{L} = \{-5, -1, 5\}$

Lösung 2

a) $x_1 \stackrel{?}{=} -b$ durch Probieren
Durch Polynomdivision erhält man:
$(x^3 + bx^2 - a^2x - ba^2) : (x + b) = x^2 - a^2$
$\Rightarrow\ x = -b$ ist Nullstelle
$\Rightarrow\ x^3 + bx^2 - a^2x - ba^2 = (x + b)(x - a)(x + a)$
$\mathcal{L} = \{-b, -a, a\}$

b) $x_1 \stackrel{?}{=} 2$ durch Probieren

$$\begin{aligned} x^3 + 14x^2 + 7x - 78 &= (x^2 + 16x + 39)(x - 2) \\ &= (x + 13)(x + 3)(x - 2) \quad = \quad 0 \end{aligned}$$

$\mathcal{L} = \{-13, -3, 2\}$

c) $x_1 \stackrel{?}{=} 1$ durch Probieren

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - 20x + 20 &= (x - 1)(x^2 - 20) \\ &= (x - 1)(x + 2\sqrt{5})(x - 2\sqrt{5}) \quad = \quad 0 \end{aligned}$$

$\mathcal{L} = \{-2\sqrt{5}, 1, 2\sqrt{5}\,\}$

Lösung 3

a) $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$
Substitution $z := x^2$
$z^2 - 25z + 144 = 0 \;\Rightarrow\; z_{1/2} = \frac{25}{2} \pm \frac{7}{2}$
$\Rightarrow\; x_{1/2} = \pm 4 \quad x_{3/4} = \pm 3$

b) $x^6 - 2x^3 + 1 = 0$
Substitution $z := x^3$

$$\begin{aligned} z^2 - 2z + 1 = 0 \quad &\Rightarrow \quad z_{1/2} = 1 \\ x^3 - 1 = 0 \quad &\Rightarrow \quad x_{1/2} = 1 \end{aligned}$$

$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$
$x_{3/4/5/6} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3}$

c) Probieren $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 = 50$
$x_1 \stackrel{?}{=} 2$ ...dividieren...
$x^5 - 2x^4 - 26x^3 + 52x^2 + 25x - 50$
$= (x - 2)(x^4 - 26x^2 + 25) = 0$
Substitution $z := x^2$

$$\begin{aligned} z^2 - 26z + 25 = 0 \quad &\Rightarrow \quad z_{1/2} = 13 \pm \sqrt{169 - 25} \\ z_1 = 25 \quad &\Rightarrow \quad x_{2/3} = \pm 5 \\ z_2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad x_{4/5} = \pm 1 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} x^6+x^4-x^2-1 &= 0\\ x^4(x^2+1)-(x^2+1) &= 0\\ (x^2+1)(x^4-1) &= 0\\ (x^2+1)(x^2-1)(x^2+1) &= 0\\ (x^2+1)^2(x+1)(x-1) &= 0 \end{aligned}$$

Das Polynom besitzt im Reellen nur die Nullstellen $x_1=+1, x_2=-1$!
$(x^2+1)^2=0$ besitzt keine reellen Lösungen.

Lösung 4

a)
$$\begin{array}{l|rrrr} & 1 & -1 & -32 & 60\\ & & 2 & 2 & -60\\ \hline (x_1=2) & 1 & 1 & -30 & 0\\ & & 5 & 30 & \\ \hline (x_2=5) & 1 & 6 & 0 & \\ (x_3=-6) & & & & \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{l|rrrrr} & 1 & -4 & -39 & 86 & 280\\ & & -2 & 12 & 54 & -280\\ \hline (x_1=-2) & 1 & -6 & -27 & 140 & 0\\ & & 7 & 7 & -140 & \\ \hline (x_2=7) & 1 & 1 & -20 & 0 & \\ & & 4 & 20 & & \\ \hline (x_3=4) & 1 & 5 & 0 & & \\ (x_4=-5) & & & & & \end{array}$$

Gleichungen mit Logarithmen und Potenzen

Lösung 1

a) $x=10$ b) $x=2187$ oder $x=\frac{1}{3}$ c) $x=-1$ oder $x=2$ d) $x=2$

15.4 Vektorrechnung

Gleichungssysteme

Lösung 1

a) $\left.\begin{aligned} y &= 3-2x\\ y &= 8-3x \end{aligned}\right\} \Rightarrow 3-2x=8-3x \Rightarrow x=5\ldots \Rightarrow \mathcal{L}=\{(5,-7)\}$

b) $\mathcal{L}=\{(4,3)\}$

Lösung 2

a) $\left.\begin{array}{rcl} 9x-2\cdot 4y &=& 14 \\ 5x-10 &=& 4y \end{array}\right\} \Rightarrow\ 9x-2(5x-10)=14\ldots \Rightarrow\ \mathcal{L}=\{(6,5)\}$

b) $\mathcal{L}=\{(-2.3,4)\}$

Lösung 3

a) Durch Addition und Subtraktion der beiden Gleichungen erhält man: $\mathcal{L}=\{(\frac{2}{3},\frac{3}{2})\}$

b) Nach Multiplizieren der zweiten Gleichung mit $-\frac{4}{3}$ erhält man zwei identische Gleichungen. $\quad\Rightarrow\ \mathcal{L}=\{(t,\frac{3}{20}(1+4t)\,|\,t\in\mathbb{R}\}=\{(\frac{1}{4}(\frac{20}{3}t-1),t)\,|\,t\in\mathbb{R}\}$

Lösung 4

a) Das Gleichungssystem ist widersprüchlich.$\Rightarrow\ \mathcal{L}=\emptyset$

b) $\mathcal{L}=\{(\sqrt{2},\sqrt{3}\,)\}$

Lösung 5

$\mathcal{L}=\{(12,7)\}$

Lösung 6

a) $\mathcal{L}=\{(12,20,30)\}$

b) $\mathcal{L}=\{(2-t,t,t+1)|t\in\mathbb{R}\}=\{(t,2-t,3-t)|t\in\mathbb{R}\}=\{(3-t,t-1,t)|t\in\mathbb{R}\}$

Lösung 7

a) Nur für $a=\frac{16}{15}$ ist das System nicht widersprüchlich

Setze $x:=t\in\mathbb{R}\Rightarrow\ \mathcal{L}=\{(t,\frac{2}{5}(4-3t)\,|\,t\in\mathbb{R}\}$

Setze $y:=t\in\mathbb{R}\Rightarrow\ \mathcal{L}=\{(-\frac{1}{3}(\frac{5}{2}t-4),t)\,|\,t\in\mathbb{R}\}$

Lösung 8

a) Eine Gerade (1) schneidet eine Parabel (2) höchstens in zwei Punkten. Durch Einsetzen der Gleichung (1) in die Gleichung (2) erhält man die Lösung.

$\mathcal{L}=\{(-25,7),(-1,-1)\}$

b) $\begin{array}{lrcl} (1) & (x-4)^2+y^2 &=& 25 \\ (2) & -8x+y^2 &=& 0 \end{array}$

Gleichung (1) stellt einen Kreis mit dem Radius $r=5$ und dem Mittelpunkt $M=(4,0)$ dar; also liegt der Scheitel $S=(0,0)$ der Parabel (2) im Inneren des Kreises. Also besitzen die beiden Gebilde höchstens zwei Schnittpunkte.

Durch Einsetzen erhält man $\mathcal{L}=\{(3,2\sqrt{6}),(3,-2\sqrt{6})\}$

Lösung 9

a) Durch Umformen von (1) erhält man

$$(x^2-1)(1-y)=0\ .$$

Nach Fallunterscheidung (1.) $y=1$, 2.) $x^2-1=0$) ergibt sich

$\mathcal{L}=\{(1,1),(-1,1)\}$

b) Durch Umformen von (2) erhält man

$$(xy-4)(x-y)=0\ .$$

Nach Fallunterscheidung (1.) $x=y$, 2.) $y=\frac{4}{x}$) ergibt sich

$\mathcal{L}=\{(0,0),(\frac{27}{4},\frac{27}{4}),(3,\frac{4}{3})\}$

Lösung 10
Nach Fallunterscheidung (1.) $x_1 = 2$, 2.) $x_2 = 4$, 3.) $y = 3$) ergibt sich
$\mathcal{L} = \{(2,t),(4,-2),(4,4),(-2,3),(3,3)|t \in \mathbb{R}\}$

Vektorrechnung

Lösung 1
$P_0 = (3,5,4)$

Lösung 2
$P + \vec{a} = (0,0,4) \qquad \vec{m} = (3,-4,0)$

Lösung 3
$|QR| = \sqrt{43}$

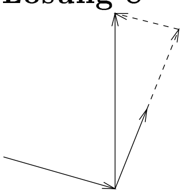
Lösung 4
$X = (2,-1,-2)$ oder $X = (2,-3,4)$ oder $X = (-4,7,-2)$

Lösung 5
Wegen $|\vec{AB}| = |\vec{AD}| = 5$ und $C = A + \vec{AB} + \vec{AD}$ und $|\vec{AC}| = \sqrt{50}$ ist $ABCD$ ein Quadrat, usw.

Lösung 6
$(8,-2,0)$

Lösung 7
$\vec{x} = \vec{r} + \vec{s} - \vec{t}$

Lösung 8



Lösung 9
$X = (0,1,0)$

Lösung 10

a) $\vec{x} = -\dfrac{\sigma}{\lambda+\mu}\vec{y}, \quad \lambda+\mu \neq 0$ b) $\vec{x} = 4\vec{y} - 6\vec{z}$ c) $\vec{x} = \dfrac{\mu-\lambda}{\lambda+\mu}\vec{y}, \quad \lambda+\mu \neq 0$

Lösung 11

a) $\dfrac{31}{30}(\vec{x}+\vec{y})$ b) $-\dfrac{1}{3}\vec{x} - \dfrac{5}{3}\vec{y}$

Lösung 12

$$L = A + \frac{1}{2}\vec{b}, \quad M = A + \frac{1}{2}\vec{a}, \quad N = A + \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$$
$$\Rightarrow \; \vec{LM} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}) \parallel \vec{BC}, \quad \vec{LN} = \frac{1}{2}\vec{a}, \quad \vec{MN} = \frac{1}{2}\vec{b}$$

Lösung 13

a) $g: \; \vec{x} = (-1, 2, 1) + \lambda\,(1, -2, 3)$ b) $g: \; \vec{x} = (-1, 2, 1) + \mu\,(3, -4, 0)$

Lösung 14

a) $\lambda = -1: \; (1, 0, -1), \; \lambda = -2: \; (0, 1, -3), \; \lambda = 2: \; (4, -3, 5)$

b) $X \in g$, (für $\lambda = -2$ und $Y \notin g$)

Lösung 15

a) $E: \; \vec{x} = (2, -2, 1) + \lambda\,(1, -2, 3) + \mu\,(-2, -2, 3)$

b) $E: \; \vec{x} = (2, -2, 1) + \sigma\,(3, -4, 0) + \delta\,(0, 1, -3)$

Lösung 16

$S_x = (4, 0, 0), \quad S_y = (0, -1, 0), \quad S_z = (0, 0, 2)$

Lösung 17

$D = (-1, 0, 2)$

Lösung 18

Beim Umformen taucht eine Zeile der Form |0 0 0 $| \neq$ 0| auf, also ist das Gleichungssystem nicht lösbar. ($\mathcal{L} = \emptyset$)

Lösung 19

Beim Umformen taucht eine Zeile der Form |0 0 0 | 0| auf und da keine Zeile der Form |0 0 0 $| \neq$ 0| zu erzeugen ist, gibt es unendlich viele Lösungen $\longrightarrow$ Behauptung!

Lösung 20

a) $\vec{x} \, * \, \vec{y} = 14$ b) selbst nachzuprüfen

Lösung 21

$\vec{m}_{\vec{n}} = -\frac{21}{25}\,(3, 0, -4)$

Lösung 22

$$d\,(P,g) = \frac{1}{3}\sqrt{30}, \quad L = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Lösung 23

$\vec{r} \times \vec{s} = (-2,-1,-4), \quad \vec{s} \times \vec{r} = -(\vec{r} \times \vec{s}) = (2,1,4)$

$(-2,4,2) \times (3,-6,0) = -2 \cdot \vec{r} \times 3 \cdot \vec{s} = -6 \cdot (\vec{r} \times \vec{s}) = (12,6,24)$

Lösung 24

Einfach nachzurechnen.

Lösung 25

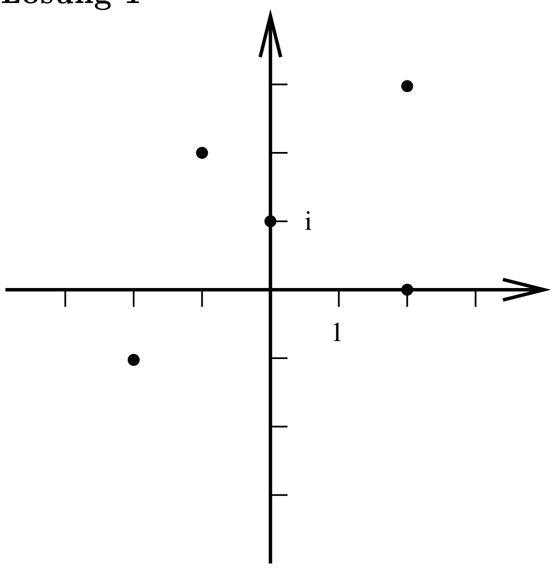
$E:\ -3x_1 + 5x_2 + 14x_3 = 21 \qquad d\,(E,0) = \dfrac{21}{\sqrt{230}}$

Lösung 26

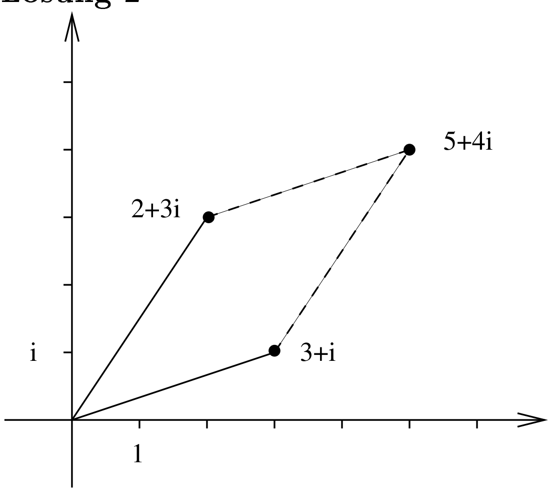
$V = 18$

15.5 Komplexe Zahlen

Lösung 1



Lösung 2



$(2+3i)+(3+i) = (2+3)+(3i+i) = 5+4i$

Lösung 3

a) $\sqrt{9+16} = 5$ b) $\overline{3-i} = \overline{3} - \overline{i} = 3+i$ c) 4 d) $\dfrac{2-i}{1+i} = \dfrac{(2-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{1-3i}{2}$

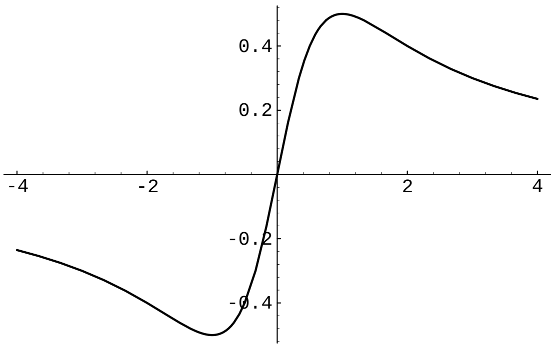
e) $\overline{(4+i)\cdot(-3+2i)} = \overline{(4+i)} \cdot \overline{(-3+2i)} = (4-i)\cdot(-3-2i) = -14-5i.$

Lösung 4
Der Grad des Polynoms ist ungerade, also existiert eine reelle Nullstelle.

15.6 Funktionen

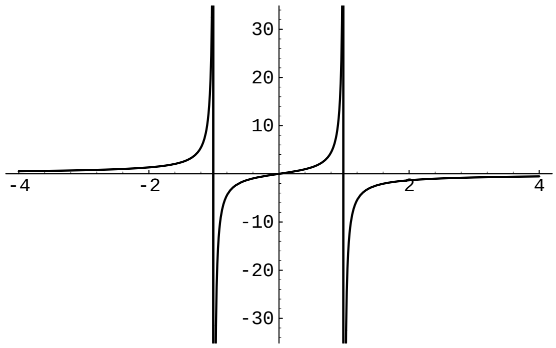
Lösung 1

a)



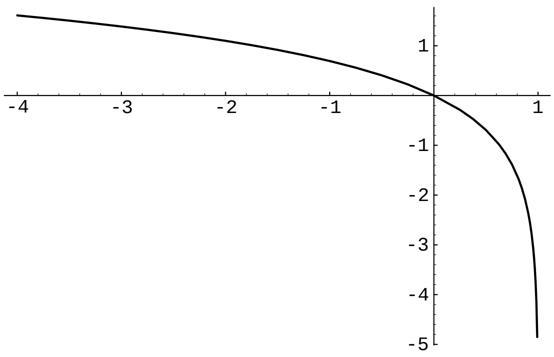
$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$
$$D = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}$$

b)



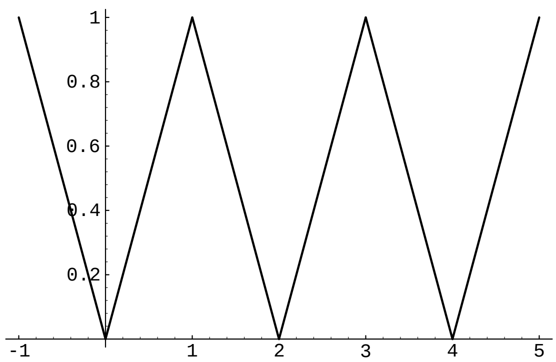
$$f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$$
$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$$

c)



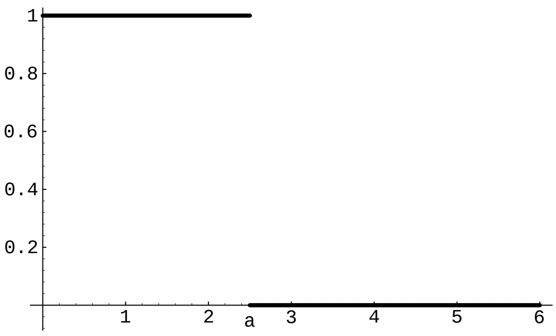
$$f(x) = \lg(1-x)$$
$$D = \{x \mid -\infty < x < 1\}$$

d)



$$D = \{x \mid -1 \leq x < 5\}$$

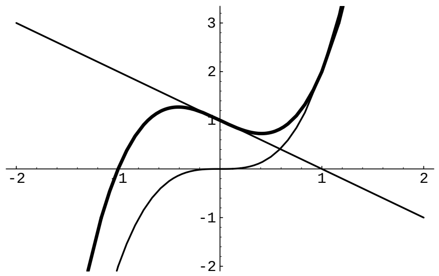
e)



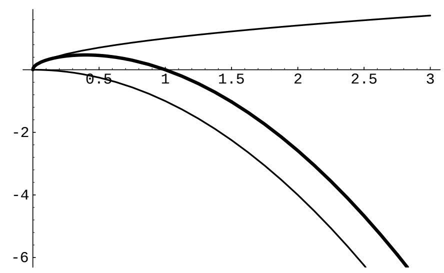
$$D = \{x \mid 0 \leq x < \infty\}$$

Lösung 2

a)

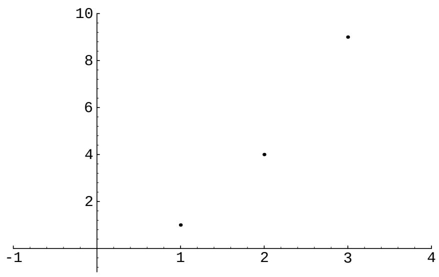


b)

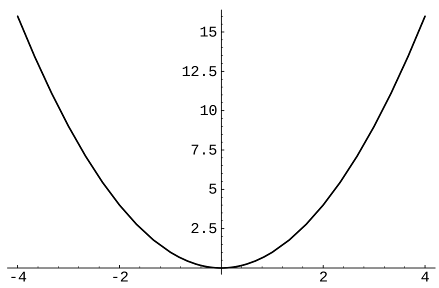


Lösung 3

a)



b)



Lösung 4

a) $y \mid \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $y(x) = x^2$ ist nicht surjektiv, da die Bildmenge nicht ganz $\mathbb{R}$ sondern nur $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ ist und nicht injektiv, da Elementen $-x$ und $+x$ das gleiche Bild zugeordnet ist. $y \mid \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, $y(x) = x^2$ ist bijektiv.

b) $y = \sin x$ ist nicht surjektiv, da nur nach $[-1, +1]$ abgebildet wird und nicht injektiv, da den Elementen $\frac{\pi}{2} - x$ und $\frac{\pi}{2} + x$ das gleiche Bild zugeordnet wird. $y \mid [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1]$, $y(x) = \sin x$ ist bijektiv.

c) $y \mid \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $y(x) = e^x$ ist injektiv aber nicht surjektiv, da nur nach $\mathbb{R}_+$ abgebildet wird. $y \mid \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $y(x) = e^x$ ist bijektiv.

Lösung 5

a) $y \mid \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $y = +\sqrt{x}$ b) $y \mid \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $y = \lg x$ c) $y \mid \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $y = \cos x$

Lösung 6

a) Der Ansatz $f \mid [2, 4] \longrightarrow [1, 2]$,$f(x) = ax + b$ liefert mit $f(2) = 1$ und $f(4) = 2$ die 2 Gleichungen $2a + b = 1$ und $4a + b = 2$. Ihre Lösung ist $a = \frac{1}{2}$ und $b = 0$. $f(x) = \frac{1}{2}x$. Die Umkehrfunktion erhält man indem man in $f(x) = \frac{1}{2}x$ $f(x)$ und x vertauscht und nach x auflöst: $x = 2f(x)$, dann wieder zurücktauscht: $f(x) = 2x$. Die Umkehrfunktion lautet $f \mid [1, 2] \longrightarrow [2, 4]$, $f(x) = 2x$.

b) $f \mid (0, 1] \longrightarrow [1, \infty)$, $f(x) = \frac{1}{x}$ oder $f(x) = -\lg x + 1$.

Lösung 7

a) $y = \frac{1-3x}{x}$, $D = \{x \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ b) $y = x$, $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

c) $y = \frac{x+2}{x-1}$, $D = \{x \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}\}$

Lösung 8

a) $y = x^4 + 3x^2 + 2$, $D = \mathbb{R}$ b) $y = x^3 + 2x^2 - 3x - 6$

c) $y = \ln(\ln x) - 3 \ln x + 5x$, $D = \{x \,|\, x > 1 \,\text{und}\, x \in \mathbb{R}\}$

Lösung 9

a) $x = t$, $y = 6t^2 + 48t + 98$ b) $x = \sin t$, $y = \cos t$

Lösung 10

a) $y' = x'^2$ b) $x = x' - 4$, $y = y' + 2$

Lösung 1

a) $f(-x) = -\left(\frac{1}{2}(-x)\right) = -\frac{1}{2}x = -f(x) \Rightarrow$ ungerade

b) $f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x \neq \begin{cases} x^2 + x = f(x) \\ -x^2 - x = -f(x) \end{cases}$

$\Rightarrow$ weder gerade noch ungerade

c) $f(-x) = -\dfrac{1}{(-x)} = \dfrac{1}{x} = -f(x) \Rightarrow$ ungerade

d) $f(-x) = -\dfrac{1}{(-x)^2} = -\dfrac{1}{x^2} = f(x) \Rightarrow$ gerade

e) $f(-x) = |-x| = |x| = f(x) \Rightarrow$ gerade

f) $f(-x) = \dfrac{-x^3 + 1}{-x^3 - 7} \neq \begin{cases} \dfrac{x^3 + 1}{x^3 - 7} = f(x) \\ -\dfrac{x^3 + 1}{x^3 - 7} = -f(x) \end{cases}$

$\Rightarrow$ weder gerade noch ungerade

g) $f(-x) = e^{-x} \neq \begin{cases} e^x = f(x) \\ -e^x = -f(x) \end{cases}$

$\Rightarrow$ weder gerade noch ungerade

h) $f(-x) = (-x)^4 + 7(-x)^2 + 8 = x^4 + 7x^2 + 8 = f(x) \Rightarrow$ gerade

i) $f(-x) = 7^{-\frac{x}{2}} \neq \begin{cases} 7^{\frac{x}{2}} = f(x) \\ -7^{\frac{x}{2}} = -f(x) \end{cases}$

$\Rightarrow$ weder gerade noch ungerade

k) $f(-x) = \dfrac{(-x)^2 + 1}{(-x)^2 - 8} = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 8} = f(x) \Rightarrow$ gerade

l) Fallunterscheidung:

1) Gilt für jeden Koeffizienten a_ν mit ungeradem Index: $a_\nu = 0$

$\Rightarrow f(-x) = f(x) \Rightarrow$ gerade

2) Gilt für jeden Koeffizienten a_ν mit geradem Index: $a_\nu = 0$

$\Rightarrow f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ ungerade

3) Gilt $a_\nu \neq 0$ für einen geraden und einen ungeraden Index

$\Rightarrow$ weder gerade noch ungerade

m) $$f(-x) = \frac{1}{(-x)^7 + (-x)^3 + 4} \neq \begin{cases} \dfrac{1}{x^7 + x^3 + 4} = f(x) \\ -\dfrac{1}{x^7 + x^3 + 4} = -f(x) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ weder gerade noch ungerade

n) $$f(-x) = \frac{1}{(-x)^2\left((-x)^5 + (-x) + \frac{6}{(-x)}\right)} = \frac{1}{x^2\left(-x^5 - x - \frac{6}{x}\right)} = -f(x) \Rightarrow \text{ungerade}$$

o) $$f(-x) = (-x) + |-x| \neq \begin{cases} x + |x| = f(x) \\ -x - |x| = -f(x) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ weder gerade noch ungerade

p) $f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x) \Rightarrow$ ungerade

q) $f(-x) = \sin(-2x) = -\sin 2x = -f(x) \Rightarrow$ ungerade

r) $f(-x) = \sin(-x)^2 = \sin x^2 = f(x) \Rightarrow$ gerade

Lösung 2

a) streng monoton wachsend

b) Im Intervall $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ streng monoton fallend

Im Intervall $\left[-\frac{1}{2}, \infty\right)$ streng monoton wachsend

c) In den Intervallen $(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$ streng monoton wachsend

g) streng monoton wachsend

i) streng monoton wachsend

o) Im Intervall $(-\infty, 0]$ gilt $f(x) = 0 \Rightarrow f$ ist dort monoton.

Im Intervall $[0, \infty)$ ist $f(x) = 2x$ also streng monoton wachsend

p) in $\ldots \left[-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}\right]; \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]; \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right] \ldots$ streng monoton wachsend

in $\ldots \left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]; \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \ldots$ streng monoton fallend

Lösung 3

a) Zunächst auflösen nach $x \Rightarrow x = 2y + 2$

Dann vertauschen der Veränderlichen $\Rightarrow y = 2x + 2$

b) $y = 2x - 2$ c) $y = \frac{1}{x}$

d) für $(-\infty, 0]$ gilt $y = -\sqrt[2n]{x}$ mit $x \geq 0$ und

für $[0, \infty)$ gilt $y = \sqrt[2n]{x}$ mit $x \geq 0$

e) $y = \sqrt[2n-1]{x}$ f) $y = \log_a x$

g) $y^3 + y^2 - x = 0$ (nur Veränderliche vertauscht)

h) $y = x + 1$ i) $y = 10^{\frac{1}{3}x}$

k) $y = \frac{1}{3} \cdot 10^x$ l) $y = 10^x$

m) für $[-2, 0]$ gilt $y = -\sqrt{4 - \frac{1}{4}x^2}$ mit $0 \leq x \leq 4$

für $[0, 2]$ gilt $y = \sqrt{4 - \frac{1}{4}x^2}$ mit $0 \leq x \leq 4$

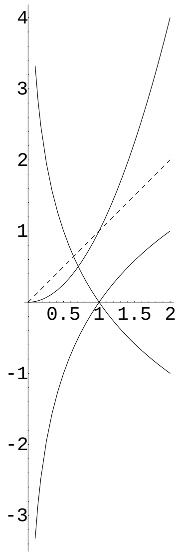
n) für $(-\infty, -2]$ gilt $y = -\sqrt{\frac{1}{4}x^2 + 4}$ mit $x \geq 0$

für $[2, \infty)$ gilt $y = \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + 4}$ mit $x \geq 0$

o) $y = -\sqrt{x}$ p) $y = x^2$

q) $y = x^3$

Lösung 4



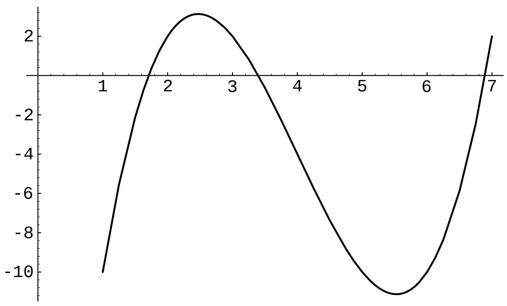
$y = x^2$ Umkehrfunktion von $y = \sqrt{x}$

$y = \log_2(x)$ Ufkt von $y = 2^x$

$y = -\log_2(x)$ Ufkt von $y = (\frac{1}{2})^x$

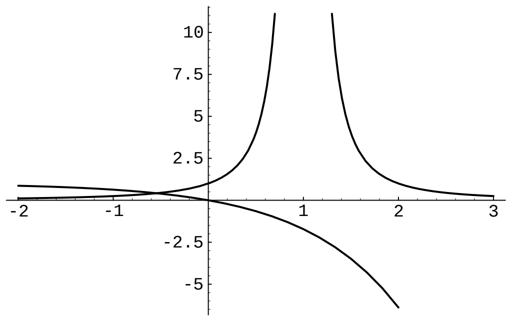
15.7 Graphisches Lösen von Gleichungen und Ungleichungen

Lösung 1



$x_1 = 1.75, \quad x_2 = 3.4, \quad x_3 = 6.8$

Lösung 2



$x_1 = -0.6$

Lösung 3

a)

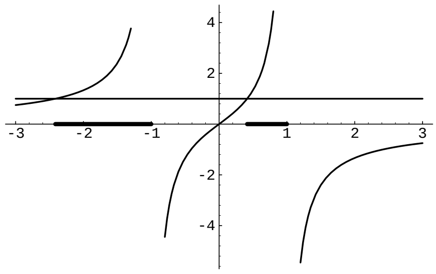
rechnerisch:

1. Fall: $1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$; $2x > 1 - x^2 \Leftrightarrow (-1 - \sqrt{2} > x)$ oder $(-1 + \sqrt{2} < x)$, also insgesamt

$$\sqrt{2} - 1 < x < 1$$

2. Fall: $1 - x^2 < 0 \Leftrightarrow (x < -1)$ oder $(x > 1)$; $2x < 1 - x^2 \Leftrightarrow -1 - \sqrt{2} < x < -1 + \sqrt{2}$, also insgesamt

$$-1 - \sqrt{2} < x < -1$$

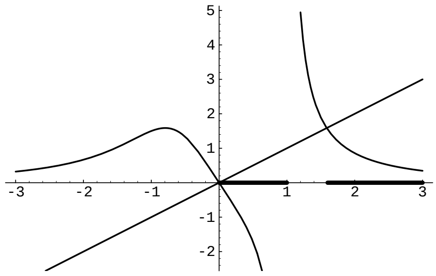


b)

rechnerisch:

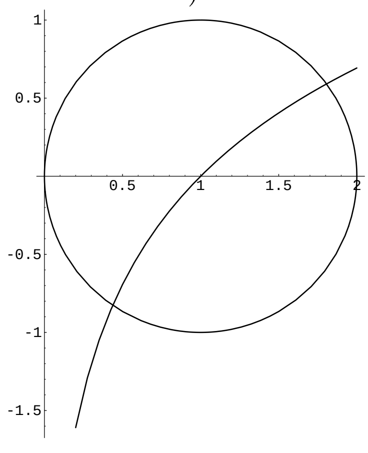
1. Fall: $x^3 - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$. Die Ungleichung ist äquivalent zu $0 < x \cdot (x^3 - 4)$. $x > 0$ und $x^3 - 4 > 0$ ergibt $x > \sqrt[3]{4}$. $x < 0$ und $x^3 - 4 < 0$ widerspricht der Voraussetzung $x > 1$.

2. Fall: $x^3 - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$. Die Ungleichung ist äquivalent zu $0 > x(x^3 - 4)$. $x > 0$ und $x^3 - 4 < 0$ schränkt auf $0 < x < 1$ ein. Wegen der Voraussetzung $x < 1$ gibt es keine x mit $(x < 0 \, \text{und} \, x^3 - 4 > 0$.



Lösung 4

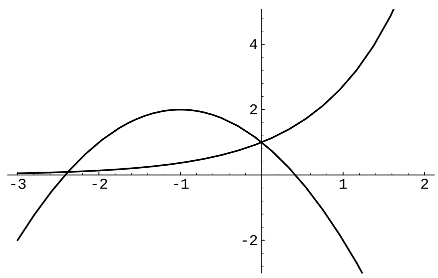
a)



$$(x_1, y_1) = (0.25, -0.8)$$

$$(x_2, y_2) = (1.95, 0.3)$$

b)

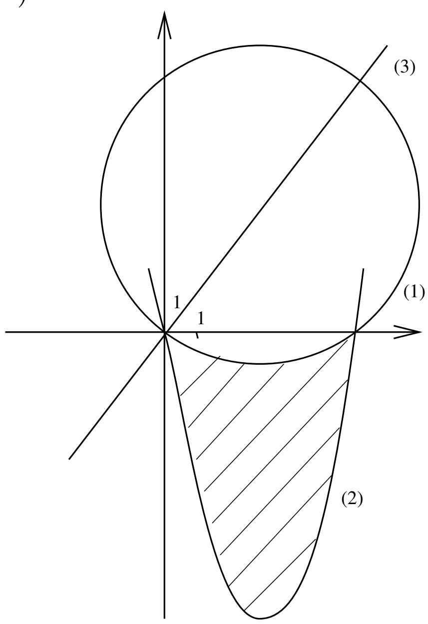


$$(x_1, y_1) = (-2.4, 0.2)$$

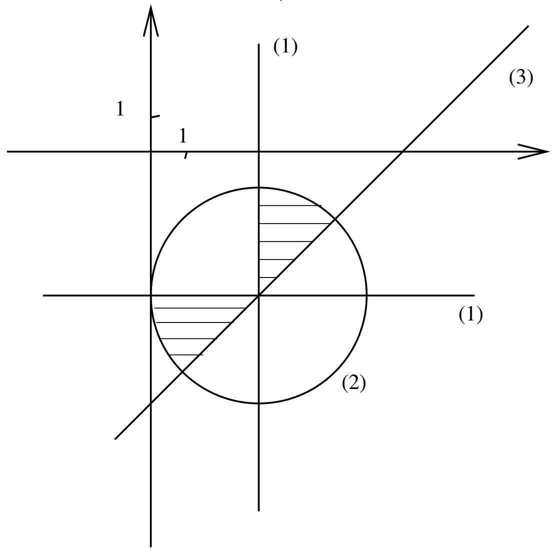
$$(x_2, y_2) = (0, 1)$$

Lösung 5

a)



b)



15.8 Folgen, Reihen, Grenzwerte

Lösung 1

$$d = -5,\ a_1 = 13; \quad a_n = a_1 + (n-1)d, \quad a_7 = a_1 + 6d,\ a_7 = -17$$
$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n), \quad s_7 = \frac{7}{2}(13 + (-17)) = \frac{7}{2}(-4) = -14$$

Lösung 2

$$a_n = 3\tfrac{1}{3} + (n-1)\tfrac{4}{3} = \tfrac{10}{3} + (n-1)\tfrac{4}{3} = 2 + \tfrac{4}{3}n$$

$$s_n = \tfrac{8}{3}n + \tfrac{2}{3}n^2 = 448 \quad \Rightarrow \quad n^2 + 4n - 672 = 0;\ n_1 = 24,\ n_2 = -28$$

$$\Rightarrow n = 24; \quad a_n = a_{24} = 34$$

Lösung 3

$a_n = 1 + (n-1)\cdot 6 = 6\,n - 5 \Rightarrow 6\,n - 5 > 10000 \Rightarrow n = 1668$

Lösung 4

a) $\dfrac{n-1}{2\,n} = \dfrac{1-\frac{1}{n}}{2} \longrightarrow \dfrac{1}{2}$ b) $\dfrac{n^2}{n+2} > \dfrac{n^2}{2\,n} = \dfrac{n}{2} \longrightarrow +\infty$

c) $\dfrac{n^2+10}{n^3} = \dfrac{1}{n} + \dfrac{10}{n^3} \longrightarrow 0$ d) $2^{-n} = \dfrac{1}{2^n} \longrightarrow 0$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(n-1)$ ex. nicht f) $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(\frac{1}{n}) = \cos(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}) = \cos 0 = 1$

g) $$\frac{5\,n + \sqrt{n+1}}{n+1} = \frac{5\,n}{n+1} + \frac{\sqrt{n+1}}{n+1} = \frac{5}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \longrightarrow 5$$

h) $$\lim_{n\to\infty} \left\{\tfrac{1}{3} \cdot \left[1 - (-\tfrac{5}{8})^n\right]\right\} = \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3} \lim_{n\to\infty} (-\tfrac{5}{8})^n = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3} \cdot 0 = \tfrac{1}{3}$$

i) $$\lim_{x\to\infty} \left\{\left(3 + \frac{\cos(x \cdot \frac{\pi}{4})}{x^2}\right) \cdot \frac{2\,x}{x-1}\right\} =$$

$$\left(\lim_{x\to\infty} 3 + \lim_{x\to\infty} \frac{\cos(x \cdot \frac{\pi}{4})}{x^2}\right) \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1-\frac{1}{x}} = (3+0) \cdot 2 = 6$$

j) $$\frac{6 + 5 \cdot 10^n}{3 + 2 \cdot 10^n} = \frac{\frac{6}{10^n} + 5}{\frac{3}{10^n} + 2} \longrightarrow \frac{5}{2}$$

k) $$\sqrt{n^2+n} - n = \frac{(\sqrt{n^2+n} - n)(\sqrt{n^2+n} + n)}{\sqrt{n^2+n} + n} =$$

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n} + n} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1} \longrightarrow \frac{1}{2}$$

Lösung 5

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1}; \quad 127.5 = (-1.5) \frac{(-2)^n - 1}{-2-1}; \quad (-2)^n = 256;$$

$n = 8, \quad a_8 = 192$

Lösung 6

Geometrische Reihe mit $a_1 = 2,\ q = 2$; $\quad s_{10} = 2 \cdot \dfrac{2^{10} - 1}{2-1} = 2 \cdot 1023 = 2046.$

Lösung 7

$a_2 = a_1 \cdot q = 6; \quad a_3 + a_4 = a_1\,q^2 + a_1\,q^3 = (a_1\,q)q + (a_1\,q)q^2 = 6\,q + 6\,q^2 = 72$

$6\,q^2 + 6\,q - 72 = 0; \quad q^2 + q - 12 = 0; \quad q_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{48}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{7}{2};$

$q_1 = 3;\ q_2 = -4 \quad a_1 \cdot q = 6; \quad a_{1/1} \cdot 3 = 6 \Rightarrow a_{1/1} = 2; \quad a_{1/2} \cdot (-4) = 6 \Rightarrow a_{1/2} = -\frac{3}{2}$

Lösung 8

$$a_1 = 5,\ q = 2; \quad s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1}; \quad 5115 = 5 \cdot \frac{2^n - 1}{2-1}$$

$\Rightarrow 1024 = 2^n \Rightarrow n = 10$

Lösung 9

$d = 17 - 3 = 14; \quad d' = 14 : 7 = 2; \quad 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, ...$

Lösung 10

$a_{10} = a_1 \cdot q^9 = 13122; \quad q = \sqrt[9]{\frac{a_{10}}{a_1}}; \quad q = \sqrt[9]{\frac{3 \cdot 13122}{2}} \Rightarrow q = 3$

Lösung 11

Das Theater faßt 1950 Plätze.

Lösung 12

$q = \frac{1}{32}; \quad q' = \sqrt[5]{q}, \quad q' = \sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}; \quad 32, 16, 8, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, ...$

Lösung 13

$q = \frac{36}{16} = \frac{9}{4}; \quad q' = \pm\sqrt{q}; \quad q' = \pm\frac{3}{2}; \quad 16, 24, 36, 54, 81, ...$

Lösung 14

$$|q| < 1 : \quad \lim_{n\to\infty} a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \frac{1}{1 - q}$$

a) $s = 32 \cdot \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 64;$ b) $s = 1 \cdot \dfrac{1}{1 - \frac{1}{5}} = \dfrac{5}{4} = 1\dfrac{1}{4};$

c) $s = 1 \cdot \dfrac{1}{1 - 0.4} = 1\dfrac{2}{3}$ d) $s = 64 \cdot \dfrac{1}{1 - \frac{1}{8}} = \dfrac{512}{7} = 73\dfrac{1}{7}$

Lösung 15

a) $$\frac{(a+n)^2}{a^2 + n^2} = \frac{a^2 + 2an + n^2}{a^2 + n^2} = \frac{\frac{a^2}{n^2} + \frac{2a}{n} + 1}{\frac{a^2}{n^2} + 1} \longrightarrow 1$$

b) $$\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^2} =$$

$$\frac{n + 1 - n}{n + 1 + 2\sqrt{n+1}\sqrt{n} + n} = \frac{1}{2(n + \sqrt{n+1}\sqrt{n}) + 1} \longrightarrow 0$$

c) $$\frac{n^2 - 2n + 1}{n^2 + n + 1} = \frac{1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} \longrightarrow 1$$

d) $$\frac{n + 2\sqrt{n}}{3n - \sqrt{n}} = \frac{1 + \frac{2}{\sqrt{n}}}{3 - \frac{1}{\sqrt{n}}} \longrightarrow \frac{1}{3}$$

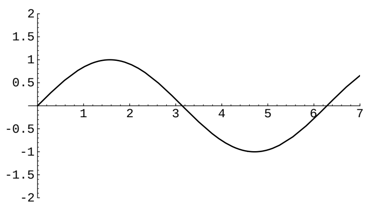
e) $\quad \dfrac{4n^2-1}{3n^2+n} = \dfrac{4-\frac{1}{n^2}}{3+\frac{1}{n}} \longrightarrow \dfrac{4}{3}$

15.9 Grenzwerte von Funktionen

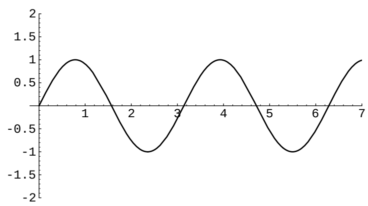
Lösung 1
a) $\frac{4}{5}$ b) $\pm\infty$

15.10 Trigonometrische Funktionen

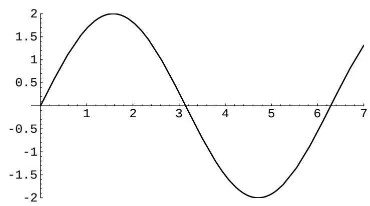
Lösung 1



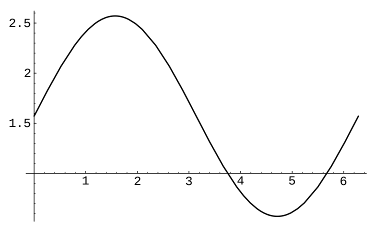
a)



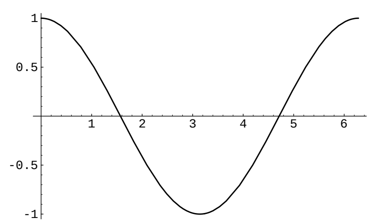
b)



c)

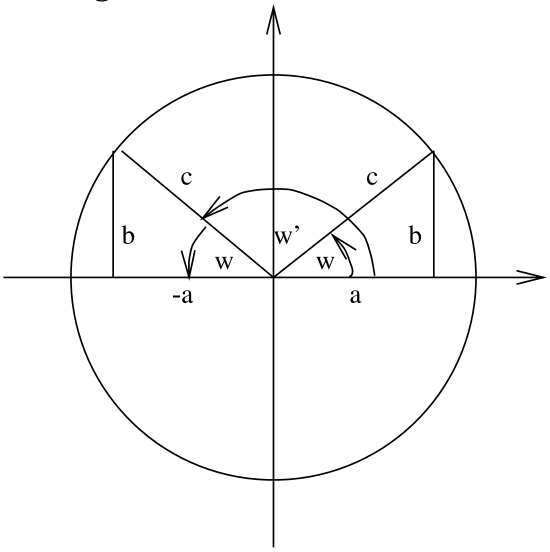


d)



e)

Lösung 2



$$\sin w = \frac{b}{c} > 0$$
$$\sin w' = \sin(180^\circ - w)$$
$$= +\sin w$$

usw.

Lösung 3

a) $\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

b) $\sin 240^\circ = \sin(180^\circ + 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

c) $\sin 300^\circ = \sin(360^\circ - 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

d) $\cos 210^\circ = \cos(180^\circ + 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

e) $\tan 210^\circ = \tan(180^\circ + 30^\circ) = \tan 30^\circ = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

f) $\cos 330^\circ = \cos(360^\circ - 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Lösung 4

a) $\sin 120^\circ = \sin(90^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

b) $\tan 120^\circ = \tan(90^\circ + 30^\circ) = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}$

c) $\cot 210^\circ = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$

d) $\cos 330^\circ = \sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

e) $\cot 330^\circ = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$

Lösung 5

a) $$\left.\begin{array}{rcl}\sin\alpha & = & \frac{a}{c}\\ \\ \cos\alpha & = & \frac{b}{c}\end{array}\right\} \overset{a^2+b^2=c^2}{\Longrightarrow} \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{c^2}=1$$

b) $$\left.\begin{array}{rcl}\tan\alpha & = & \frac{a}{b}\\ \\ \cot\alpha & = & \frac{b}{a}\end{array}\right\} \Longrightarrow \tan\alpha=\frac{a}{b}=\frac{1}{\frac{b}{a}}=\frac{1}{\cot\alpha}$$

c) $1+\tan^2\alpha=1+\dfrac{a^2}{b^2}=\dfrac{b^2+a^2}{b^2}=\dfrac{c^2}{b^2}=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

d) $\tan\alpha\cdot\cot\alpha=\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{b}{a}=1$

Lösung 6

a) $\sin 2\alpha=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

b) $\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(\cos 0^\circ-\cos 2\alpha)=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$

c) Mit $\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$ folgt $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$

$=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)-2\sin^2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

Lösung 7

a) $$\cos\alpha = \frac{1}{+\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \quad \text{für} \quad \begin{array}{rcccr} -450^\circ & < & \alpha & < & -270^\circ \\ -90^\circ & < & \alpha & < & +90^\circ \\ +270^\circ & < & \alpha & < & +450^\circ \\ \vdots & & & & \vdots \end{array}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{-\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \quad \text{für} \quad \begin{array}{rcccr} -270^\circ & < & \alpha & < & -90^\circ \\ +90^\circ & < & \alpha & < & +270^\circ \\ +450^\circ & < & \alpha & < & +630^\circ \\ \vdots & & & & \vdots \end{array}$$

b) $$\sin\alpha = +\sqrt{1-\cos^2\alpha} \quad \text{für} \quad \begin{array}{rcccr} -360^\circ & \leq & \alpha & \leq & -180^\circ \\ 0^\circ & \leq & \alpha & \leq & +180^\circ \\ +360^\circ & \leq & \alpha & \leq & +540^\circ \\ \vdots & & & & \vdots \end{array}$$

$$\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} \quad \text{für} \quad \begin{array}{rcccr} -180^\circ & < & \alpha & < & 0^\circ \\ +180^\circ & < & \alpha & < & +360^\circ \\ \vdots & & & & \vdots \end{array}$$

Lösung 8

a) Periode π b) 2π c) 2π d) π e) 4π f) π

Lösung 9

a) $y = \tan x$ besitzt die Periode π

und die Asymptoten $x = -\frac{\pi}{2},\ x = +\frac{\pi}{2}, \ldots$

b) $y = \cot x$ besitzt die Periode π

und die Asymptoten $x = -\pi,\ x = 0,\ x = \pi,$ ...

c) $y = \tan\frac{x}{2}$ besitzt die Periode $2\,\pi$

und die Asymptoten $x = -\pi,\ x = +\pi,$ ...

d) $y = \cot 2x$ besitzt die Periode $\frac{\pi}{2}$

und die Asymptoten $x = -\pi,\ x = -\frac{\pi}{2},\ x = 0, x = \frac{\pi}{2},\ x = \pi,$ ...

15.11 Technik des Differenzierens

Lösung 1

a) $\lim\limits_{x \to 0+0} \dfrac{x^2 - 0}{x - 0} = 0 \quad$ und $\quad \lim\limits_{x \to 0-0} \dfrac{x^2 - 0}{x - 0} = 0$

$\Rightarrow f$ für $x_0 = 0$ differenzierbar.

b) wie a) für $x_0 = 0$ ist $\sqrt{3}x^5$ differenzierbar.

c) Wir betrachten zunächst den Grenzwert von $f(x) = 2\tan x$

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}+0} 2\tan x = -\infty \quad$ und $\quad \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}-0} 2\tan x = \infty$

$\Rightarrow f$ für $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$ nicht stetig, also auch nicht differenzierbar.

d) $\lim\limits_{x \to 0+0} \dfrac{\sqrt{x} - 0}{x - 0} = \infty \quad$ und $\quad \lim\limits_{x \to 0-0} \dfrac{\sqrt{-x} - 0}{x - 0} = -\infty$

$\Rightarrow f$ für $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.

e) $\lim\limits_{x \to 1\pm 0} \dfrac{x + \frac{1}{x} - 2}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1\pm 0} \dfrac{1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to 1\pm 0} \dfrac{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2}{1 - \frac{1}{x}}$

$\lim\limits_{x \to 1\pm 0} 1 - \dfrac{1}{x} = 0$

$\Rightarrow f$ für $x_0 = 1$ differenzierbar.

f) $$\lim_{x \to 2 \pm 0} \frac{\frac{x^2-4}{x+2} - 0}{x-2} = \lim_{x \to 2 \pm 0} \frac{x-2}{x-2} = 1$$

$\Rightarrow f$ für $x_0 = 2$ differenzierbar.

Lösung 2

a) $5x^4$ b) $-3x^{-4}$ c) $-2x^{-3}$ d) $\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{8}}$ e) $\frac{5}{4}x^{\frac{1}{4}}$

Lösung 3

a) $12x + 4$ b) $6abx^5 - b$ c) $-10x^{-3} + \frac{9}{2}x^{\frac{1}{2}}$

d) $6\cos x + 3\sin x$ e) $\dfrac{1}{\cos^2 x} - a\sin x + 7e^x$

Lösung 4

a) $4(3x^2 - 6) + (4x + 7)6x = 36x^2 + 42x - 24$

b) $\dfrac{(x^2+1)4 - 2x \cdot 4x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{4(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$

c) $\dfrac{(x-8)[4x^3(x^5-3x) + x^4(5x^4-3)] - x^4(x^5-3x)}{(x-8)^2} = \dfrac{4x^4(2x^5 - 18x^4 - 3x + 30)}{(x-8)^2}$

d) $\dfrac{e^x(\ln x + x \cdot \frac{1}{x}) - e^x \cdot x \cdot \ln x}{e^{2x}} = \dfrac{(1-x)\ln x + 1}{e^x}$

e) $\dfrac{(x^2-1)^{\frac{1}{3}} \cdot (\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{3}(x^2-1)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x \cdot x^{\frac{3}{2}}}{\left(\sqrt[3]{x^2-1}\right)^2} = \dfrac{(x^2-1)^{-\frac{2}{3}}[(x^2-1)\frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3} \cdot x \cdot x^{\frac{3}{2}}]}{(x^2-1)^{\frac{2}{3}}}$

$= \dfrac{(x^2-1)\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{2}{3}x^2\sqrt{x}}{\sqrt[3]{(x^2-1)^4}} = \dfrac{\frac{1}{6}\sqrt{x}(5x^2-9)}{\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}$

f) $\dfrac{1}{\cos^2 x} \cdot \sin x + \tan x \cdot \cos x = \sin x(\dfrac{1}{\cos^2 x} + 1)$

g) $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x \cdot 2\sin x \cdot \cos x} = \dfrac{1}{2\sin x \cdot \sin x}$

$f'(x) = \dfrac{2\sin x \cdot \sin x \cdot 0 - (2\cos x \cdot \sin x + 2\cos x \sin x) \cdot 1}{4\sin^2 x \cdot \sin^2 x}$

$= -\dfrac{\cos x}{\sin x \cdot \sin^2 x} = -\dfrac{\cot x}{\sin^2 x}$

Lösung 5

a) $3(2x^2 - 6x + 13)^2 \cdot (4x - 6)$

$= 6(8x^5 - 60x^4 + 248x^3 - 576x^2 + 806x - 507)$

b) $\frac{1}{2}(27x - 3x^4)^{-\frac{1}{2}} \cdot (27 - 12x^3) = \dfrac{27 - 12x^3}{2\sqrt{27 - 3x^4}}$

c) $-\dfrac{1}{\sin^2(4x^3)} \cdot 12x^2$

d) $\dfrac{1}{(\tan(2x) + 9x^6)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{2}(\tan(2x) + 9x^6)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\dfrac{1}{\cos^2(2x)} \cdot 2 + 54x^5\right)$
$= \dfrac{\frac{1}{\cos^2(2x)} + 27x^5}{\tan(2x) + 9x^6}$

e) $\ln 26 \cdot 2e^{2x}$

f) $e^{2\cos x} \cdot (-2\sin x) \cdot \left(\dfrac{1}{2\sin^2 x}\right)^{\frac{1}{3}} + e^{2\cos x} \cdot \frac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2\sin^2 x}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot (-\sin^{-3} x \cdot \cos x)$
$= e^{2\cos x} \cdot \left(\dfrac{1}{2\sin^2 x}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left[-2\sin x \cdot \dfrac{1}{2\sin^2 x} - \frac{1}{3}\sin^{-3} x \cdot \cos x)\right]$
$= e^{2\cos x} \cdot \left(\dfrac{1}{2\sin^2 x}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \dfrac{1}{\sin x} \cdot \left[-1 - \frac{1}{3}\sin^{-2} x \cdot \cos x)\right]$

g) $\dfrac{xe^{ax}}{(1 + ax)^2}$

h) $-\dfrac{1}{2a} \cdot \dfrac{1}{\sin^2\left(\frac{ax}{2}\right)} \cdot \dfrac{a}{2} + \dfrac{1}{6a}\left[3\cot^2\left(\dfrac{ax}{2}\right) \cdot \dfrac{1}{\sin^2\left(\frac{ax}{2}\right)} \cdot \dfrac{a}{2}\right]$
$= -\dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{\sin^2\left(\frac{ax}{2}\right)} \cdot \left[1 - \cot^2\left(\dfrac{ax}{2}\right)\right]$

i) $\dfrac{x}{3(3 + \sqrt{9 - x^2})} \cdot \dfrac{x \cdot \frac{1}{2}(9 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) - (3 + \sqrt{9 - x^2})}{x^2} = \dfrac{-1}{x\sqrt{9 - x^2}}$

k) $\dfrac{1}{\frac{a^2 + x^2}{x^3}} \cdot \dfrac{2x \cdot x^3 - 3x^2(a^2 + x^2)}{x^6} = \dfrac{1}{a^2 + x^2} \cdot \dfrac{2x^2 - 3(a^2 + x^2)}{x}$
$= \dfrac{2x^2 - 3(a^2 + x^2)}{x(a^2 + x^2)}$

Lösung 6

a) $f(x) = x \cdot 10^x = xe^{\ln 10^x} = x \cdot e^{x \cdot \ln 10}$

$f'(x) = e^{x \cdot \ln 10} + xe^{x \cdot \ln 10} \cdot \ln 10 = 10^x(1 + x \cdot \ln 10)$

b) $f(x) = 2^{\cos x} = e^{\cos x \cdot \ln 2}$

$f'(x) = e^{\cos x \cdot \ln 2} \cdot (-\sin x) \cdot \ln 2 = -2^{\cos x} \cdot \sin x \cdot \ln 2$

c) $f(x) = 2ab^{2x-1} = 2ae^{(2x-1)\ln b}$

$f'(x) = 2ae^{(2x-1)\ln b} \cdot 2 \ln b = 2ab^{2x-1} \cdot 2 \ln b$

d) $f(x) = (\tan x)^x = e^{x \cdot \ln(\tan x)}$

$$f'(x) = (\tan x)^x \left[\ln(\tan x) + x \cdot \frac{1}{\tan x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\right]$$

$$= (\tan x)^x \left[\ln(\tan x) + \frac{x}{\sin x \cdot \cos x}\right]$$

e) $f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \log_2 e \qquad x > 0$

f) $f'(x) = 0$

g) $f'(x) = -2x^{-3} \cdot \log_5 x + \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x} \cdot \log_5 e = x^{-3}(-2 \log_5 x + \log_5 e)$

$$= x^{-3} \left(\log_5 \frac{e}{x^2}\right)$$

15.12 Anwendungen der Differentialrechnung

Lösung 1
a) $\frac{4}{5}$ b) $\frac{1}{24}$

Lösung 2
Maximalen Flächeninhalt hat ein Quadrat mit der Kantenlänge 15m.

15.13 Technik des Integrierens

Lösung 1

a) $I = \frac{2}{3}\int x^{-5}\,dx + 7\int x^4\,dx = \frac{2}{3}\left(\frac{x^{-4}}{-4} + c_1\right) + 7\left(\frac{x^5}{5} + c_2\right)$

$= -\frac{x^{-4}}{6} + \frac{7x^5}{5} + c \qquad \left(c = \frac{2}{3}c_1 + 7c_2\right)$

c, c_1, c_2 bezeichnen die Integrationskonstanten

b) $I = \frac{3}{2}\int x^{\frac{1}{2}}\,dx - \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{3}{2}\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{3}{2}} + c_1\right) - \left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c_2\right)$

$= x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + c \qquad \left(c = \frac{3}{2}c_1 - c_2\right)$

c) $I = 5\int x^{\frac{2}{3}}\,dx + \frac{2}{\sqrt[4]{5}}\int x^{-\frac{3}{4}}\,dx = 5\cdot\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + \frac{2}{\sqrt[4]{5}}\cdot\frac{x^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}} + c$

$= 3x^{\frac{5}{3}} + \frac{8}{\sqrt[4]{5}}\cdot x^{\frac{1}{4}} + c$

d) $I = \int \frac{x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1}{x}\,dx = \int\left(x^5 - 3x^3 + 3x - \frac{1}{x}\right)dx$

$= \frac{x^6}{6} - \frac{3x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} - \ln|x| + c$

e) $I = 3\int x^{-\frac{3}{2}}\,dx + 5\int x^{\frac{2}{3}-\frac{3}{2}}\,dx = -6x^{-\frac{1}{2}} + 30x^{\frac{1}{6}} + C$

f) $I = 27x + \frac{216}{5}x^{\frac{5}{4}} + 24x^{\frac{3}{2}} + \frac{32}{7}x^{\frac{7}{4}} + c$

Lösung 2

Die Integranden sind leicht auf die Form $\frac{f'(x)}{f(x)}$ zu überführen.

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$$

a) $I = \ln|\sin x| + c$

b) $I = -\frac{1}{b} \int \frac{-b \sin x}{a + b \cos x}\, dx = -\frac{1}{b} \ln |a + b \cos x| + c$

c) $I = \frac{1}{nb} \int \frac{nbx^{n-1}}{a + bx^n}\, dx = \frac{1}{nb} \ln |a + bx^n| + c$

d) $I = \ln |e^x + a| + c$

e) $I = \frac{1}{2b} \ln |a + bx^2| + c$

f) $I = \int \frac{\frac{1}{(\cos x)^2}}{\frac{\sin x}{\cos x}}\, dx = \int \frac{\frac{1}{(\cos x)^2}}{\tan x}\, dx = \ln |\tan x| + c$

Lösung 3

partielle Integration: $\int uv'\, dx = uv - \int u'v\, dx$

a) $I = \int \ln |x| \cdot 1\, dx = x \ln |x| - \int 1\, dx = x(\ln |x| - 1) + c$

$u = ln|x| \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$ und $v' = 1 \Rightarrow v = x$

b) $I = -\sin x \cos x + \int (\cos x)^2\, dx = -\sin x \cos x - \int (1 - (\sin x)^2)\, dx$

$= -\sin x \cos x + x - \int (\sin x)^2\, dx + c_1$

$\Rightarrow 2 \cdot I = x - \sin x \cos x + c_1 \Rightarrow I = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + c$

$u = \sin x \Rightarrow u' = \cos x$ und $v' = \sin x \Rightarrow v = -\cos x$

c) $I = x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x\, dx$

$u = x^3 \Rightarrow u' = 3x^2$ und $v' = e^x \Rightarrow v = e^x$

$\int x^2 e^x = x^2 e^x - 2 \int x e^x\, dx$

$u = x^2 \Rightarrow u' = 2x$ und $v' = e^x \Rightarrow v = e^x$

$\int x e^x = x e^x - \int e^x\, dx = x e^x - e^x + c_1$

$u = x \Rightarrow u' = 1$ und $v' = e^x \Rightarrow v = e^x$

$\Rightarrow I = x^3 e^x - 3(x^2 e^x - 2(x e^x - e^x + c_1))$

$= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x + c = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + c$

d) $I = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx$

$u = e^x \Rightarrow u' = e^x$ und $v' = \sin x \Rightarrow v = -\cos x$

$\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx$

$u = e^x \Rightarrow u' = e^x \quad$ und $\quad v' = \cos x \Rightarrow v = \sin x$

$\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx$

$\Rightarrow I = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + c$

e) $I = \sin^2 x - \int \sin x \cdot \cos x \, dx$

$u = \sin x \Rightarrow u' = \cos x \quad$ und $\quad v' = \cos x \Rightarrow v = \sin x$

$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \sin^2 x + c$

f) $I = \int \sin^3 x dx$

$u = \sin^2 x \Rightarrow u' = 2 \sin x \cdot \cos x \quad$ und $\quad v' = \sin x \Rightarrow v = -\cos x$

$I = -\sin^2 x \cdot \cos x + 2 \int \sin x \cdot \cos^2 x \, dx$

$$\begin{aligned} 2 \int \sin x \cdot \cos^2 x \, dx = 2 \int (\sin x - \sin^3 x) \, dx &= 2 \cos x - 2 \int \sin^3 x \, dx \\ &= 2 \cos x - 2I \end{aligned}$$

$3I = -\sin^2 x \cos x + 2 \cos x$

$\Rightarrow I = -\frac{1}{3} \cos x (\sin^2 x + 2) + c$

Lösung 4
Integration durch Substitution:
Bei geeigneter Wahl der Funktion $x = \varphi(t)$ kann die rechte Seite der Gleichung

$$\int f(x) \, dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

leichter zu integrieren sein.

a) $I = \dfrac{(\ln |x|)^2}{2} + c \qquad$ mit $\varphi(t) = \ln |t|$

b) $I = \dfrac{1}{a} \int (\sin ax) \cdot a \, dx = -\dfrac{\cos ax}{a} + c \qquad$ mit $\varphi(t) = at$

c) $I = \dfrac{1}{m} \int m \cdot e^{mx} \, dx = \dfrac{1}{m} e^{mx} + c \qquad$ mit $\varphi(t) = mt$

d) $I = \int \left(e^{\ln a}\right)^x \, dx = \int e^{(\ln a) \cdot x} \, dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c \qquad$ mit $\varphi(t) = (\ln a) \cdot t$

e) $I = \dfrac{1}{b} \int (a + bx)^n \cdot b \, dx = \dfrac{(a + bx)^{n+1}}{b(n+1)} + c \qquad$ mit $\varphi(t) = a + bt$

f) $I = \dfrac{1}{b} \int (a+bx)^{\frac{1}{2}} \cdot b\, dx = \dfrac{2}{3b}(a+bx)^{\frac{3}{2}} + c \quad \text{mit } \varphi(t) = a + bt$