

**Klausur zum Modul
„Lineare Algebra
für Studierende der Ingenieurwissenschaften“**

Aufgabe 1. Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 10 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -14 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

- 1.1. (2.0 Punkte.)** Berechnen Sie eine Basis des Kernes von A .
 - 1.2. (2.0 Punkte.)** Berechnen Sie eine Basis des Bildes von A .
 - 1.3. (1.0 Punkte.)** Bestimmen Sie Rang und Defekt von A .
 - 1.4. (1.0 Punkte.)** Untersuchen Sie, ob die reellen Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ im Kern oder im Bild der reellen (3×3) -Matrix A enthalten sind.
-

Aufgabe 2. Gegeben sei die reelle (3×3) -Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 8 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 2.1. (3.0 Punkte.)** Berechnen Sie Determinante der Matrix B .
 - 2.2. (3.0 Punkte.)** Untersuchen Sie, ob B invertierbar ist. Berechnen Sie gegebenenfalls die Inverse von B .
-

Aufgabe 3. Gegeben sei die reelle (3×3) -Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 7 & -20 & -8 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -8 & -3 \end{pmatrix}.$$

3.1. (3.0 Punkte.) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix C .

3.2. (3.0 Punkte.) Berechnen Sie eine Transformationsmatrix T derart, dass $D = T^{-1}CT$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 4. Sei $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die orthogonale Projektion auf den Teilvektorraum

$$U = \{ (\alpha, 2\alpha, -\alpha)^\top \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R} \}.$$

4.1. (3.0 Punkte.) Berechnen Sie eine Orthonormalbasis B des $\mathbb{R}^3$, die aus Eigenvektoren der linearen Abbildung p besteht. (Die Basis B kann derart angeordnet werden, dass p bezüglich B die Matrixdarstellung

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

besitzt.)

4.2. (3.0 Punkte.) Berechnen Sie die Matrixdarstellung M von p bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^3$.

- Lösungen -

1.1. $\{(3, -1, 1)^\top\}$.

1.2. $\{(1, -3, 2)^\top, (0, 7, 1)^\top\}$.

1.3. $\text{Defekt}(A) = 1, \text{Rang}(A) = 2$.

1.4. $\mathbf{a} \in \text{Kern}(A), \mathbf{a} \notin \text{Bild}(A), \mathbf{b} \notin \text{Kern}(A), \mathbf{b} \in \text{Bild}(A)$.

2. $\det(B) = -4, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}.$

3. Die Matrix C besitzt die Eigenwerte $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2$. Die Vektoren $\mathbf{v}_1 = (2, 1, -1)^\top, \mathbf{v}_2 = (1, 0, 1)^\top, \mathbf{v}_3 = (4, 1, 0)^\top$ sind Eigenvektoren von C zu λ_1, λ_2 respektive λ_3 . Dementsprechend ist

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

eine Transformationsmatrix mit $\text{Diag}(1, -1, 2) = T^{-1}CT$. (Eine explizite Berechnung von $T^{-1}CT$ zur Kontrolle der Rechnung war nicht verlangt.)

4. Es ist $\{(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})^\top\}$ eine Orthonormalbasis von U . Also ist

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

die gesuchte Matrixdarstellung von p . Die Vektoren $\mathbf{u}_1 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})^\top, \mathbf{u}_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})^\top, \mathbf{u}_3 = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})^\top$ bilden eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von p .