TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG
INSTITUT FÜR MATHEMATISCHE OPTIMIERUNG
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Prof. Dr. S. Fekete, Dr. W. Marten

Wintersemester 2002/2003
6.2.2003, Blatt 13

Übungen zum Modul „Lineare Algebra für Studierende der Ingenieurwissenschaften“

Key Terms. *Matrixdarstellung. Basiswechsel. Matrix-Inversion. Determinante. Charakteristisches Polynom, Eigenwerte, Eigenvektoren. Transformation auf Diagonalgestalt. Orthonormalbasen. Das Verfahren von Gram-Schmidt. Orthogonale Projektionen.*

93.G. Gegeben sei die reelle (3×3)-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 6 & -10 \\ 8 & 11 & -8 \\ 16 & 10 & -11 \end{pmatrix}.$$

93.1. Berechnen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die Determinante von A.

93.2. Zeigen Sie, dass der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ eine Basis aus Eigenvektoren der Matrix A besitzt.

93.3. Berechnen Sie eine invertierbare reelle (3×3)-Matrix T derart, dass $T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix D ist. Machen Sie die Probe. Überlegen Sie sich, welche Bedeutung die Diagonalelemente von D besitzen.

93.4. Zeigen Sie, dass die Matrix A invertierbar ist. Berechnen Sie A^{-1}. Wenden Sie die Ergebnisse aus 93.3 an.

94.G. Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

94.1. Berechnen Sie eine Orthonormalbasis von $\ker(A) \subseteq \mathbb{R}^4$.

94.2. Berechnen Sie eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^4$, die aus Eigenvektoren der linearen Abbildung P besteht.

94.3. Rechnen Sie nach, dass

$$M(P) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

die Matrixdarstellung der orthogonalen Projektion $P : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ von $\mathbb{R}^4$ auf $\ker(A)$ hinsichtlich der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^4$ ist. Nach Definition gilt $P\mathbf{v} = \mathbf{v}$ für alle $\mathbf{v} \in \ker(A)$ und $P\mathbf{w} = \mathbf{0}$ für alle Vektoren $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^4$, die auf dem Teilraum $\ker(A)$ senkrecht stehen.

94.4. Berechnen Sie den Abstand $d(\mathbf{b}, \ker(A))$ von $\mathbf{b}$ und $\ker(A)$.

Wichtige Termine.

- Klausur *Lineare Algebra*, Mittwoch, 26.02.2003, 9.00-10.30 Uhr.
- Klausur *Analysis I*, Mittwoch, 26.02.2003, 11.30-13.00 Uhr.
- Erste Klausureinsicht, Mittwoch, 5.3.2003, 14.00-16.00 Uhr.
- Zweite Klausureinsicht, Mittwoch, 2.4.2003, 14.00-16.00 Uhr.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg.
