TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG
INSTITUT FÜR MATHEMATISCHE OPTIMIERUNG
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Prof. Dr. S. Fekete, Dr. W. Marten

Wintersemester 2002/2003
23.1.2003, Blatt 11

Übungen zum Modul
„Lineare Algebra
für Studierende der Ingenieurwissenschaften"

82.G. Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 3 & 13 \\ 2 & 4 & 3 & 8 & 4 & 22 \\ 3 & 6 & 4 & 12 & 5 & 31 \\ 4 & 8 & 5 & 16 & 4 & 38 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 24 \\ 38 \\ 52 \\ 58 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathbf{b}$ im Bild $\mathrm{im}(A)$ von A liegt. Stellen Sie den Vektor $\mathbf{b}$ als Linearkombination der Vektoren aus einer Basis von $\mathrm{im}(A)$ dar. Berechnen Sie eine Basis des Kernes $\ker(A)$ von A. Berechnen Sie Rang und Defekt der Matrix A.

83.K. Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 21 & 3 \\ 4 & 0 & 12 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 18 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 24 \\ 4 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathbf{b}$ im Bild $\mathrm{im}(A)$ von A liegt. Stellen Sie den Vektor $\mathbf{b}$ als Linearkombination der Vektoren aus einer Basis von $\mathrm{im}(A)$ dar. Berechnen Sie eine Basis des Kernes $\ker(A)$ von A. Berechnen Sie Rang und Defekt der Matrix A.

84.G. Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} , \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie Determinante und Inverse von A. Berechnen Sie die eindeutig bestimmte Lösung $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ von $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ auf mehrere Weisen.

85.K. Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix} , \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie Determinante und Inverse von A. Berechnen Sie die eindeutig bestimmte Lösung $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ von $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ auf mehrere Weisen.

86.G. Sei $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ eine beliebige Basis des $\mathbb{R}^3$. Prüfen Sie nach, dass die Vektoren

$$\mathbf{b}_1 = -\mathbf{a}_1 + 5\mathbf{a}_2 + 19\mathbf{a}_3 \, , \; \mathbf{b}_2 = 4\mathbf{a}_1 - 10\mathbf{a}_2 - 31\mathbf{a}_3 \, , \; \mathbf{b}_3 = 4\mathbf{a}_1 - 6\mathbf{a}_2 - 16\mathbf{a}_3$$

eine Basis B des $\mathbb{R}^3$ bilden. Prüfen Sie nach, dass die Vektoren

$$\mathbf{c}_1 = 4\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \, , \; \mathbf{c}_2 = -2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 \, , \; \mathbf{c}_3 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3$$

eine Basis C des $\mathbb{R}^3$ bilden. Die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei durch

$$\mathbf{b}_1 \mapsto 8\mathbf{a}_1 - 3\mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_3 \, , \; \mathbf{b}_2 \mapsto -2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 \, , \; \mathbf{b}_3 \mapsto -3\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 - 3\mathbf{a}_3$$

definiert. Berechnen Sie die Matrix M, die die lineare Abbildung φ bezüglich der Basis C beschreibt.

87.K. Sei $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ die Projektion $(x, y, z)^\top \mapsto (x, y)^\top$ von $\mathbb{R}^3$ auf $\mathbb{R}^2$. Prüfen Sie nach, dass die Vektoren

$$\mathbf{a}_1 = (1, 2, 3)^\top \, , \; \mathbf{a}_2 = (1, 0, 4)^\top \, , \; \mathbf{a}_3 = (0, 0, 2)^\top$$

eine Basis A des $\mathbb{R}^3$ bilden. Prüfen Sie nach, dass die Vektoren

$$\mathbf{b}_1 = (1, 1)^\top \, , \; \mathbf{b}_2 = (2, 1)^\top$$

eine Basis B des $\mathbb{R}^2$ bilden. Berechnen Sie die (2×3)-Matrix M, die die Projektion p bezüglich der Basen A und B beschreibt.