TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG
INSTITUT FÜR MATHEMATISCHE OPTIMIERUNG
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Prof. Dr. S. Fekete, Dr. W. Marten

Wintersemester 2002/2003
5.12.2002, Blatt 6

Übungen zum Modul
„Lineare Algebra
für Studierende der Ingenieurwissenschaften“

Key Terms. *Vektorprodukt. Entwicklungssatz von Grassmann. Jacobi-Identität. Winkelgeschwindigkeit und momentane Bahnebene. Umrechnung von Parameterform auf Hesse-Normalform.*

45.G. Rechnen Sie nach, dass

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$$

für alle $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ gilt.

46.K. Rechnen Sie die Gültigkeit der Formel aus 45.G für die Vektoren $\mathbf{a} = (1, -2, 3)^\top$ und $\mathbf{b} = (-4, 5, -6)^\top$ explizit nach.

47.Geo. Wiederholen Sie 46.K für die Vektoren $\mathbf{a} = (-7, 8, 9)^\top$ und $\mathbf{b} = (10, 11, -12)^\top$.

48.G. Wir betrachten spezielle Bewegungen von Punktteilchen im $\mathbb{R}^3$. Wir nehmen an, dass zu jedem Zeitpunkt $t \in I$ des Zeitintervalles $I \subseteq \mathbb{R}$ der Ortsvektor $\mathbf{r}(t)$ und der Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}(t)$ linear unabhängig und zueinander orthogonal sind. Dann gibt es zu jedem $t \in I$ einen eindeutig bestimmten Vektor $\boldsymbol{\omega}(t)$, der die Bedingungen

$$\mathbf{v}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}(t)\,, \ \ \|\mathbf{v}(t)\| = \|\boldsymbol{\omega}(t)\|\,\|\mathbf{r}(t)\|$$

für alle $t \in I$ erfüllt. (Diese Bedingungen werden durch die Analyse gleichförmiger ebener Kreisbewegungen nahegelegt.) Es gilt

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \frac{\mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t)}{\|\mathbf{r}(t)\|^2}$$

für alle $t \in I$. Die Vektoren $\mathbf{v}(t)$ und $\mathbf{r}(t)$ spannen eine Ebene $E(t) \subseteq \mathbb{R}^3$ auf, die den Ursprung $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$ enthält. Die *Winkelgeschwindigkeit* $\boldsymbol{\omega}(t)$ steht auf der *momentanen Bahnebene* $E(t)$ senkrecht.

49.K. Gegeben seien die Punkte

$$\mathbf{a} = (3, 0, -4)^\top, \ \mathbf{b} = (3, 4, 0)^\top, \ \mathbf{c} = (-3, 2, 4)^\top, \ \mathbf{p} = (3, 2, 1)^\top.$$

Berechnen Sie die Hesse-Normalform der Ebene E, die die Punkte $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ enthält. Berechnen Sie den Abstand $d(\mathbf{p}, E)$ zwischen $\mathbf{p}$ und E.

50.Geo. Gegeben seien

$$\mathbf{a} = (3, 0, 4)^\top, \ \mathbf{b} = (-1, 2, -2)^\top, \ \mathbf{p} = (1, 2, 3)^\top$$

Berechnen Sie die Hesse-Normalform der Ebene E, die parallel zu den beiden Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ ist und den Punkt $\mathbf{p}$ enthält. Berechnen Sie den Abstand $d(\mathbf{0}, E)$ zwischen dem Ursprung $\mathbf{0}$ und der Ebene E.

51.G. Rechnen Sie nach, dass die Jacobi-Identität

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$$

für alle $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ gilt. Wenden Sie den Entwicklungssatz von Grassmann dreimal an.

52.K. Rechnen Sie die Gültigkeit der Jacobi-Identität aus 51.G für

$$\mathbf{a} = (1, -2, 3)^\top, \ \mathbf{b} = (-4, 5, -6)^\top, \ \mathbf{c} = (7, -8, 9)^\top$$

explizit nach.

Große Übung: Aufgaben 45.G, 48.G, 51.G.

Kleine Übung: Aufgaben 46.K, 49.K, 52.K.

Geoökologie: Hausaufgaben sind die Aufgaben 47.Geo, 50.Geo. Abgabe der Ausarbeitungen zu Beginn der kleinen Übung am 17.12.02
