TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG
INSTITUT FÜR MATHEMATISCHE OPTIMIERUNG
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Prof. Dr. S. Fekete, Dr. W. Marten

Wintersemester 2002/2003
30.1.2003, Blatt 12

Übungen zum Modul
„Analysis I
für Studierende der Ingenieurwissenschaften“

88.G. Rechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale nach.

88.1. $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x^2+1}{x^3-1}\,dx = -\frac{\sqrt{3}}{9}\,\pi - \frac{2}{3}\,\ln(2)\,.$

88.2. $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{x}{4-x^2+\sqrt{4-x^2}}\,dx = \ln\left(\frac{3}{2}\right).$

88.3. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2+\cos(x)+\sin(x)}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{4}\,\pi\,.$

88.4. $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} (2x+3)^2\sin(4x)\,dx = -4\pi^2 - 6\pi\,.$

89.G. Finden Sie einen Algorithmus zur Berechnung von unbestimmten Integralen der Form

$$\int p(x)\cos(ax)\,dx\,,\quad \int p(x)\sin(ax)\,dx\,,$$

wobei $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ ein reelles Polynom und $a \in \mathbb{R}$ eine reelle Konstante ist.

90.K. Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale. Machen Sie die Probe durch Differentiation.

90.1. $\displaystyle\int \frac{x^4+2x-6}{x^3+x^2-2x}\,dx\,.$

90.2. $\displaystyle\int \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos^3(x)}}\,dx\,.$

90.3. $\displaystyle\int \left(\frac{\exp(x^2)}{2x} + x\exp(x^2)\ln(x)\right)dx\,.$

90.4. $\displaystyle\int x^5\cos(x^3)\,dx\,.$

(Hinweise. 90.1. Nehmen Sie eine Partialbruchzerlegung des Integranden vor. 90.2. Substituieren Sie den Radikanden. 90.3. Versuchen Sie jeden Summanden partiell zu integrieren. Wenden Sie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung an. 90.4. Partielle Integration und Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.)

91.G. Prüfen Sie nach, dass die folgenden Funktionen die angegebene Taylorentwicklung um den Entwicklungspunkt $x = 0$ besitzen.

$$x\arctan(x) = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{5} - \frac{x^8}{7} \pm \dots\,, \tag{1}$$

$$\frac{1}{2}\ln(1+x^2) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6} - \frac{x^8}{8} \pm \dots\,. \tag{2}$$

Beide Potenzreihen konvergieren für $|x| < 1$ und divergieren für $|x| > 1$. Folgern Sie aus den Reihendarstellungen (1) und (2), dass

$$\int_0^x \arctan(\xi)\,d\xi = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) \tag{3}$$

für $|x| < 1$ gilt. Prüfen Sie durch Differentiation nach, dass (3) tatsächlich für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Berechnen Sie das Integral in (3) ohne Rückgriff auf die Reihendarstellungen (1) und (2) direkt, indem Sie zuerst partiell und dann logarithmisch integrieren.

92.K. Betrachten Sie noch einmal 79.K. Der gesuchte Abstand d ergibt sich aus $d = \cos(\varphi)$, wobei $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ eine Lösung der Gleichung

$$\frac{\pi}{3} = \varphi - \frac{1}{2}\sin(2\varphi) \tag{4}$$

ist. Dabei ist φ der halbe Öffnungswinkel des zum Schnitt zugehörigen Kreissektors. Gleichung (4) lässt sich geometrisch herleiten. Stellen Sie (4) mit Hilfe der Integralrechnung auf.