

**Übungen zum Modul
„Analysis I
für Studierende der Ingenieurwissenschaften“**

70.K. Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x - 1}$$

auf drei Arten: Wenden Sie die Ungleichungen aus Aufgabe 69.G, die Regeln von de l'Hospital respektive die Taylorentwicklung von $\ln(x)$ um $x_0 = 1$ an.

71.K. Berechnen Sie aus der Taylorentwicklung von $\ln(x)$ um $x_0 = 1$ eine rationale Näherung von $\ln(1.2)$ mit einer Genauigkeit von 10^{-3} . Verwenden Sie zur Fehlerabschätzung das Restglied von Lagrange.

72.G. Folgern Sie aus der Taylorentwicklung von $\ln(1+x)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ die Reihendarstellung

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (1)$$

für $|x| < 1$. Die Reihe auf der rechten Seite von (1) konvergiert für $|x| < 1$ und divergiert für $|x| > 1$. Gewinnen Sie aus (1) eine rationale Näherung für $\ln(3)$ mit einer Genauigkeit von 10^{-3} . Verwenden Sie zur Fehlerabschätzung das Restglied von Lagrange.

73.K. Sei $p(x) = 3x^4 - x^3 - 5x^2 - 4x + 6$. Berechnen Sie das vierte Taylorpolynom von $p(x)$ um $x_0 = 1$. Machen Sie die Probe, indem Sie das berechnete Taylorpolynom als Polynom in x schreiben.

74.Geo. Sei $q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3x + 1$. Berechnen Sie das dritte Taylorpolynom von $q(x)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 2$. Machen Sie die Probe, indem Sie das berechnete Taylorpolynom als Polynom in x schreiben.

75.G. Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei durch $f(x) = \exp(-|x|^{-1})$ für $x \neq 0$ und $f(0) = 0$ definiert. Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar ist. Berechnen Sie die Taylorreihe von f um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. In welchen Punkten wird f durch diese Reihe dargestellt?

76.K. Berechnen Sie die Taylorreihe von $f(x) = x(1 + x^2)^{-2}$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

77.Geo. Berechnen Sie das vierte und das fünfte Taylorpolynom von $f(x) = \exp(\sin(x^2))$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

78.G. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x) = (x-5)e^x + 5$ definiert. Es gilt $f(0) = 0$. Folgern Sie aus dem Monotonieverhalten, dass f genau eine weitere Nullstelle ξ besitzt. Es gilt $\xi \in (\frac{9}{2}, 5)$. Berechnen Sie ξ mit dem Newton-Verfahren mit einer Genauigkeit von 10^{-6} . Wählen Sie den Startpunkt $x_0 = 5$.

79.K. Von einer Kreisscheibe vom Radius $R = 1$ soll durch einen geradlinigen Schnitt ein Drittel der Fläche abgeteilt werden. In welchem Abstand d vom Kreismittelpunkt ist der Schnitt zu führen? Berechnen Sie d mit dem Newton-Verfahren mit einer Genauigkeit von 10^{-6} .

80.Geo. Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x) = 8 - x^{-1}$ definiert. Berechnen Sie die Nullstelle ξ von f mit dem Newton-Verfahren näherungsweise. Berechnen Sie zu diesem Zweck für die Startwerte $x_0 = 0.1$ und $x_0 = 0.5$ die ersten fünf Glieder der Folge, die das Newton-Verfahren liefert. Verwenden Sie einen Taschenrechner. Was beobachten Sie?

81.G. Die Funktion $f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ sei durch $f(x) = \sin(x)$ definiert. Berechnen Sie die Folge (x_n) , die das Newton-Verfahren liefert, wenn der Startwert $x_0 \in (-\pi, \pi)$ die Gleichung $\tan(x_0) = 2x_0$ erfüllt. Berechnen Sie einen solchen Startwert näherungsweise mit dem Newton-Verfahren.

Große Übung. Aufgaben 72.G, 75.G, 78.G, 81.G.

Kleine Übung. Aufgaben 70.K, 71.K, 73.K, 76.K, 79.K.

Geoökologie. Hausaufgaben sind die Aufgaben 74.Geo, 77.Geo, 80.Geo.
Abgabe der Ausarbeitung zu Beginn der kleinen Übung am 28.1.2003.
