TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG
INSTITUT FÜR MATHEMATISCHE OPTIMIERUNG
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Prof. Dr. S. Fekete, Dr. W. Marten

Wintersemester 2002/2003
28.11.2002, Blatt 5/1

Übungen zum Modul „Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften“

Key Terms. *Folgen und Grenzwerte. Reihen und Summen. Geometrische Reihen. Teleskop-Reihen. Stetigkeit. ϵ-δ-Kriterium. Folgenkriterium. Stetige Ergänzbarkeit.*

36.G. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

36.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{\sqrt{n+2}}-\dfrac{n}{\sqrt{n+4}}\right).$

36.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right).$

37.K. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

37.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}+1}.$

37.2. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}-1\right).$

38.G. Berechnen Sie die Summen der folgenden Reihen.

38.1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n.$

38.2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-\dfrac{2}{5}\right)^n.$

38.3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

38.4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2+15n+4}$.

Hinweise. Betrachten Sie 38.2 als Differenz zweier geometrischer Reihen. Vergleichen Sie mit 38.1. Zerlegen Sie 38.3 und 38.4 in Teleskop-Reihen.

39.K. Berechnen Sie die Summen der folgenden Reihen.

39.1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{5}{6}\right)^n$.

39.2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2+8n+3}$.

Verwenden Sie die Methoden aus 38.G.

40.Geo. Berechnen Sie die Summen der folgenden Reihen.

40.1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{3}{4}\right)^n$.

40.2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n}$.

Verwenden Sie die Methoden aus 38.G.

41.G. Zeigen Sie mit Hilfe des ϵ-δ-Kriteriums, dass die polynomialen Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$ und $g(x) = x^2$ stetig sind.

42.K. Die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ sei durch

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$$

definiert. Überlegen Sie sich, dass f durch $f(2) = 4$ stetig ergänzt werden kann. Prüfen Sie die Stetigkeit im Punkt $x = 2$ mit dem ϵ-δ-Kriteriums nach. Verfahren Sie wie in 41.G.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG
INSTITUT FÜR MATHEMATISCHE OPTIMIERUNG
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Prof. Dr. S. Fekete, Dr. W. Marten

Wintersemester 2002/2003
28.11.2002, Blatt 5/2

Übungen zum Modul
„Analysis I
für Studierende der Ingenieurwissenschaften“

43.G. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei durch

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x^{-1}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

definiert.

43.1. Untersuchen Sie mit dem Folgenkriterium, ob f im Punkt $x = 0$ stetig ist. Betrachten Sie dazu die beiden Nullfolgen

$$x_n = \frac{2}{\pi(4n+1)}, \; x_n = \frac{2}{\pi(4n-1)}.$$

43.2. Zeigen Sie, dass $\lim_{x\to 0}(x\sin(x^{-1})) = 0$ gilt.

44.Geo. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

44.1. $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{2-\sqrt{x}}{4-x}$.

44.2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$.

Große Übung: Aufgaben 36.G, 38.G, 41.G, 43.G.

Kleine Übung: Aufgaben 37.K, 39.K, 42.K.

Geoökologie: Hausaufgaben sind die Aufgaben 40.Geo, 44.Geo. Abgabe der Ausarbeitungen zu Beginn der kleinen Übung am 10.12.02

- Lösungen -

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{5}$	$\frac{5\pi}{6}$
$\cos(x)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1+\sqrt{5}}{4}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{1}{2}$

3.Geo. $M_2 = (-\infty, -\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{31}}{2}) \cup [\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{34}}{2}, -\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{31}}{2}) \cup [\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{34}}{2}, \infty)$.

8.Geo. $z_1 = 4 + 5i$, $z_2 = -3 - 2i$.

11.Geo. $\mathbf{v} = -\frac{1}{3}\mathbf{b} = -\frac{1}{3}(2, 1, -2)$, $\mathbf{w} = \frac{1}{3}(14, -14, 7)$.

17.Geo. $d(\mathbf{R}, g) = \frac{3\sqrt{493}}{\sqrt{38}} \approx 10.8$.

22.Geo. $z_1 = i = \exp(\frac{\pi}{2}\, i)$, $z_2 = 64 + 64\sqrt{3}\, i = 128 \exp(\frac{\pi}{3}\, i)$.

23.G. $z_1 = -1-2i$, $z_2 = (\frac{1}{2}+\sqrt{3})+(1-\frac{\sqrt{3}}{2})\, i$, $z_3 = (\frac{1}{2}-\sqrt{3})+(1+\frac{\sqrt{3}}{2})\, i$.

25.Geo. $z_1 = -i$, $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$, $z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$.

31.Geo. $\mathbf{v} = -\frac{8}{21}\mathbf{b} = -\frac{8}{21}(2, -4, 1)$, $\mathbf{w} = \frac{1}{21}(79, 10, -118)$.

34.Geo. $L = \{\, (-3 + 2\alpha + \beta, 4 - 3\alpha - 2\beta, \beta, \alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \,\}$.

Achten Sie auf Druckfehler.

WM