

**Übungen zum Modul
„Analysis I
für Studierende der Ingenieurwissenschaften“**

Key Terms. *Folgen und Grenzwerte. Reihen und Summen. Geometrische Reihen. Teleskop-Reihen. Stetigkeit. ϵ - δ -Kriterium. Folgenkriterium. Stetige Ergänzzbarkeit.*

36.G. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

36.1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{\sqrt{n+2}} - \frac{n}{\sqrt{n+4}} \right).$

36.2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}} \right).$

37.K. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

37.1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - \sqrt{n}}{n + \sqrt{n} + 1}.$

37.2. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right).$

38.G. Berechnen Sie die Summen der folgenden Reihen.

38.1. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5} \right)^n.$

38.2. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{5} \right)^n.$

$$38.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

$$38.4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2 + 15n + 4}.$$

Hinweise. Betrachten Sie 38.2 als Differenz zweier geometrischer Reihen. Vergleichen Sie mit 38.1. Zerlegen Sie 38.3 und 38.4 in Teleskop-Reihen.

39.K. Berechnen Sie die Summen der folgenden Reihen.

$$39.1. \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{5}{6}\right)^n.$$

$$39.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 + 8n + 3}.$$

Verwenden Sie die Methoden aus 38.G.

40.Geo. Berechnen Sie die Summen der folgenden Reihen.

$$40.1. \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{3}{4}\right)^n.$$

$$40.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3n}.$$

Verwenden Sie die Methoden aus 38.G.

41.G. Zeigen Sie mit Hilfe des ϵ - δ -Kriteriums, dass die polynomialen Funktionen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$ und $g(x) = x^2$ stetig sind.

42.K. Die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$ sei durch

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

definiert. Überlegen Sie sich, dass f durch $f(2) = 4$ stetig ergänzt werden kann. Prüfen Sie die Stetigkeit im Punkt $x = 2$ mit dem ϵ - δ -Kriteriums nach. Verfahren Sie wie in 41.G.

**Übungen zum Modul
„Analysis I
für Studierende der Ingenieurwissenschaften“**

43.G. Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei durch

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x^{-1}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

definiert.

43.1. Untersuchen Sie mit dem Folgenkriterium, ob f im Punkt $x = 0$ stetig ist. Betrachten Sie dazu die beiden Nullfolgen

$$x_n = \frac{2}{\pi(4n+1)}, \quad x_n = \frac{2}{\pi(4n-1)}.$$

43.2. Zeigen Sie, dass $\lim_{x \rightarrow 0} (x \sin(x^{-1})) = 0$ gilt.

44.Geo. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

44.1. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{4 - x}.$

44.2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x}.$

Große Übung: Aufgaben 36.G, 38.G, 41.G, 43.G.

Kleine Übung: Aufgaben 37.K, 39.K, 42.K.

Geoökologie: Hausaufgaben sind die Aufgaben 40.Geo, 44.Geo. Abgabe der Ausarbeitungen zu Beginn der kleinen Übung am 10.12.02

- Lösungen -

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{5}$	$\frac{5\pi}{6}$
$\cos(x)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1+\sqrt{5}}{4}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{1}{2}$

3.Geo. $M_2 = (-\infty, -\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{31}}{2}) \cup [\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{34}}{2}, -\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{31}}{2}) \cup [\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{34}}{2}, \infty)$.

8.Geo. $z_1 = 4 + 5i$, $z_2 = -3 - 2i$.

11.Geo. $\mathbf{v} = -\frac{1}{3}\mathbf{b} = -\frac{1}{3}(2, 1, -2)$, $\mathbf{w} = \frac{1}{3}(14, -14, 7)$.

17.Geo. $d(\mathbf{R}, g) = \frac{3\sqrt{493}}{\sqrt{38}} \approx 10.8$.

22.Geo. $z_1 = i = \exp(\frac{\pi}{2}i)$, $z_2 = 64 + 64\sqrt{3}i = 128 \exp(\frac{\pi}{3}i)$.

23.G. $z_1 = -1 - 2i$, $z_2 = (\frac{1}{2} + \sqrt{3}) + (1 - \frac{\sqrt{3}}{2})i$, $z_3 = (\frac{1}{2} - \sqrt{3}) + (1 + \frac{\sqrt{3}}{2})i$.

25.Geo. $z_1 = -i$, $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$, $z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$.

31.Geo. $\mathbf{v} = -\frac{8}{21}\mathbf{b} = -\frac{8}{21}(2, -4, 1)$, $\mathbf{w} = \frac{1}{21}(79, 10, -118)$.

34.Geo. $L = \{(-3 + 2\alpha + \beta, 4 - 3\alpha - 2\beta, \beta, \alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

Achten Sie auf Druckfehler.

WM