Wie schnell wächst die harmonische Reihe?

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
\mathrm{Maj}(n) & & 1 & + & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{4} & + & \frac{1}{4} & + & \frac{1}{4} & + & \frac{1}{4} & + & \dots \\
\geq & & \geq & & & & & & & & & & & & & & \\
H(n) & & 1 & + & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{3} & + & \frac{1}{4} & + & \frac{1}{5} & + & \frac{1}{6} & + & \dots & + & \\
\geq & & \geq & & & & & & & & & & & & & & \\
\mathrm{Min}(n) & & 1 & + & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{4} & + & \frac{1}{4} & + & \frac{1}{8} & + & \frac{1}{8} & + & \frac{1}{8} & + & \frac{1}{8}
\end{array}
$$

Man sieht:

$$\mathrm{Maj}(n) \leq 1 + \log(n)$$

$$\mathrm{Min}(n) \geq 1 + \frac{1}{2}\log(n)$$

Also: $H(n)$ wächst „ungefähr" wie $1+\log(n)$ der Logarithmus von n!

Anders gesagt:

$$\frac{1}{2} \leq \frac{H(n)}{1+\log(n)} \leq 1$$

Minorantenkriterium:

~~Ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent und~~

Ist $\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent

und $a_i \geq b_i$ für alle i,

so ist $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent

Majorantenkriterium:

Ist $\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent

und $0 \leq a_i \leq b_i$ für alle i,

so ist $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent

Wichtigste Minorante: Harmonische Reihe

" Majorante: Geometrische Reihe

(2. Hälfte

Geometrische Reihe

$$\cancel{\sum_{i=1}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}}$$

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$$

Also auch

$$\sum_{i=1}^{n+1} q^i = q + q^2 + \ldots + q^{n+1}$$

Dann ist

$$(1-q) \cdot \sum_{i=0}^{n} q^i = 1 - q^{n+1}$$

oder für $q \neq 0$

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q}$$

Man sieht:

Für $|q| > 1$ divergiert die Reihe (Klar!)

Für $|q| < 1$ geht $\frac{q^{n+1}}{1-q}$ gegen Null, also konvergiert das gegen $\frac{1}{1-q}$.

Grenzwertregeln

Betrachte die Folge

$$(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

Konvergiert a_n gegen a

b_n gegen b,

dann konvergiert

$(a_n + b_n)$ gegen $a + b$

(Betrachte

$$\left| (a_n + b_n) - (a + b) \right| \leq |a_n - a| + |b_n - b|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$= \varepsilon$$

für n groß genug!)

Betrachte ebenso

$$\left(a_n \cdot b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Konvergiert $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a

$\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen b,

so konvergiert

$\left(a_n \cdot b_n\right)$ gegen $a \cdot b$.

(Denn

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab|$$

$$\leq |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab|$$

Für n genügend groß ist $a_n \leq a+1$

$$|b_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2|a+1|}$$

$$b\,|a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Also $|a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab|$

$$\leq |a_n|\,|b_n - b| + |b|\,|a_n - a|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.\;)$$

Entsprechend überlegt man sich

für
$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to a$$
$$(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \to b \neq 0,$$

dass
$$\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \to \frac{a}{b} \quad \text{konvergiert.}$$

(Problematisch:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) \quad \text{für} \quad a_n \to 0 \quad \text{und} \quad b_n \to 0 \quad !$$

Beispiele:

(1) $$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n^2} \\ b_n &= \frac{1}{n} \end{aligned}\right\} \quad \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{n} \to 0$$

(2) $$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n^2} \\ b_n &= \frac{2}{n^2} \end{aligned}\right\} \quad \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{2}$$

(3) $$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n^2} \\ b_n &= \frac{1}{n^3} \end{aligned}\right\} \quad \frac{a_n}{b_n} = n \to \infty$$

Einfache Regeln dazu gibt es auch, dafür braucht man aber Differentialrechnung! (→ Regel von de L'Hôpital!)

Funktionen und Grenzwerte

Eine Folge von Zahlen ist nichts als eine Abbildung, die jeder Zahl $n \in \mathbb{N}$ ein Folgeglied $a_n \in \mathbb{R}$ zuordnet. Wir schreiben

$$a : \overset{\text{Ausgangsmenge}}{\mathbb{N}} \to \overset{\text{Zielmenge}}{\mathbb{R}}$$

$$\underset{\text{Urbild}}{n} \mapsto \underset{\text{Bild}}{a_n}$$

In vielen Zusammenhängen ~~bildet~~ ordnet man nicht nur ganzen Zahlen irgendwelche Werte zu, sondern beliebigen Reellen Zahlen.

Beispiel: Ort eines griechischen Läufers oder eines Papierfliegers!

$$\begin{aligned} \mathrm{Ach}: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\to \mathrm{Ach}(t) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \mathrm{Flieg}: \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3 \\ t &\to \mathrm{Flieg}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Auch andere Mengen sind möglich!

Wir schreiben allgemein:

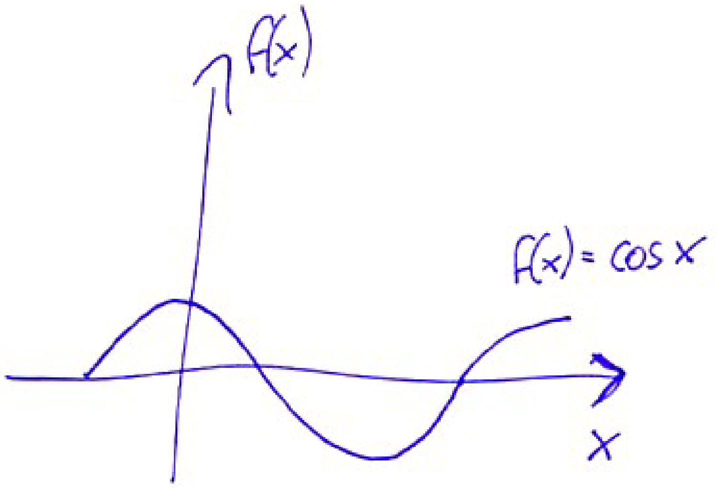
$$\begin{aligned} f: \mathbb{X} &\to \mathbb{Y} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Wir wollen uns jetzt erst einmal mit reellen Funktionen beschäftigen, d.h.

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \,! \end{aligned}$$

Vorstellung: Entwicklung einer Größe in der Zeit!

Übliche Darstellung und Vorstellung:



Wichtige Funktionen:

Polynome: $f(x) = x$

$f(x) = x^2$

$f(x) = x^{15}$

oder auch $f(x) = 17x^3 + 22x^2 + 7x + 1$ $\rightarrow$ allgemein: $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$

(Spezialfall: Lineare Funktionen! $f(x) = ax + b$)

~~Exponentialfunktion~~

(Gebrochen-) Rationale Funktionen:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$ mit $g(x)$, $h(x)$ Polynomen

Exponentialfunktionen:

$$f(x) = 2^x$$

$f(1) = 2$
$f(2) = 4$
$f(3) = 8$

$$f(x) = 10^x$$

$$f(x) = e^x$$

Logarithmusfunktionen:

$$f(x) = \log_2 x$$

$$f(x) = \log_{10} x$$

$$f(x) = \log_e x = \ln \cancel{x}$$

Winkelfunktionen:

$$f(x) = \sin x$$

$$f(x) = \cos x$$

$$f(x) = 2 \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$

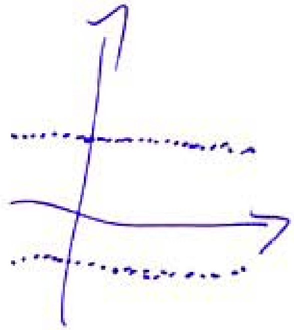
Aber es gibt auch ganz andere Funktionen:

$$f(x) = |x|$$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

... oder noch etwas wilder:

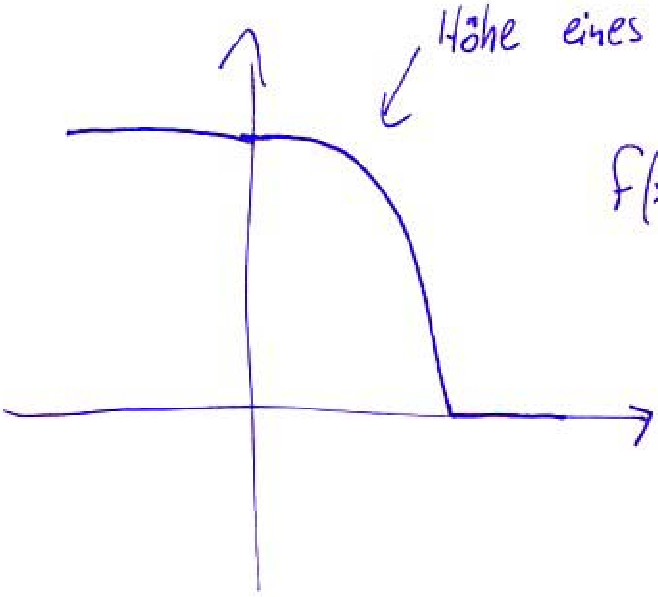
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{für } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$



Die meisten Funktionen in der Natur „springen" nicht derartig hin und her:

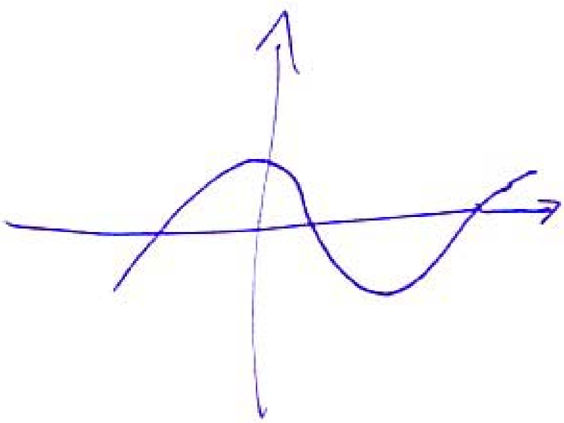
(Carl von Linné 1707-1778: „Natura non facit saltus")

Höhe eines Papierfliegers

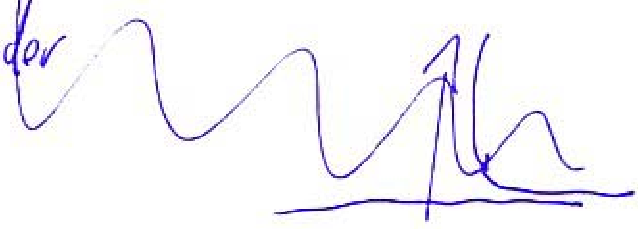


$$f(x) = \begin{cases} H & \text{für } x \leq 0 \\ H - \frac{1}{2} g x^2 & \text{für } 0 \leq x \leq \sqrt{\frac{2H}{g}} \\ 0 & \text{für } x \geq \sqrt{\frac{2H}{g}} \end{cases}$$

oder

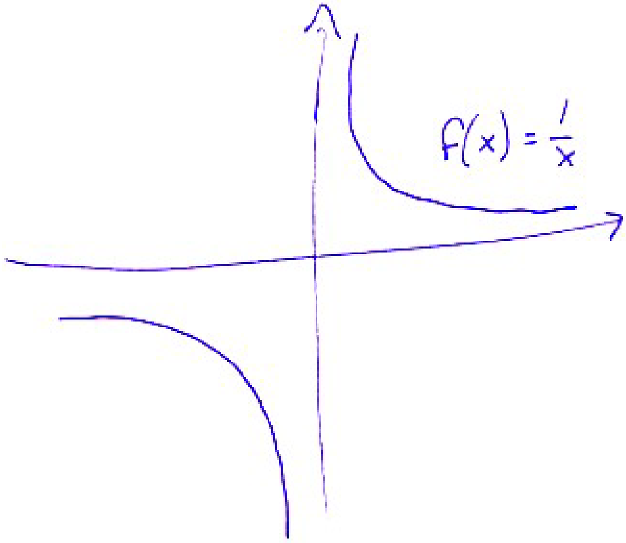


oder

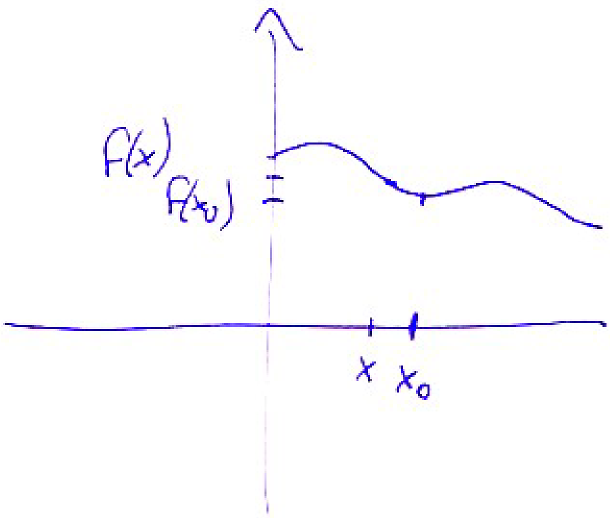


d.h. man kann ~~stk~~ „ohne abzusetzen" zeichnen.
jedes Stück

Gilt auch hier

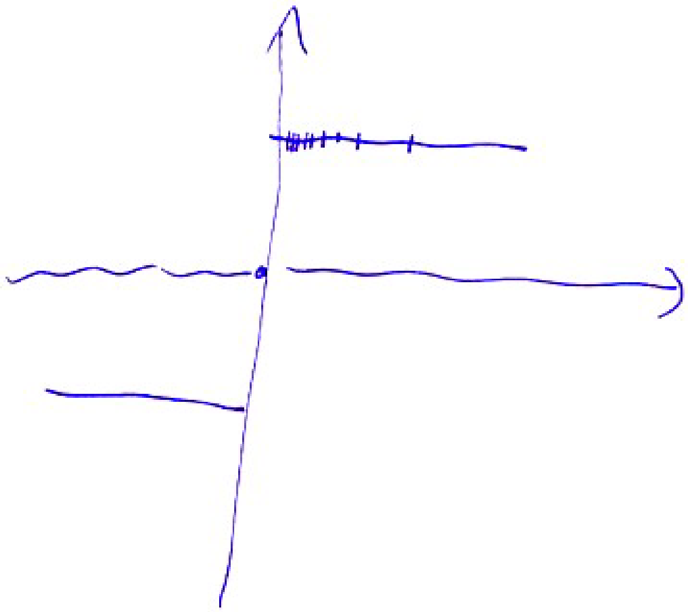


Beobachtung:



Wenn man x auf x_0 zuwandern lässt,
dann nähert sich auch $f(x)$ an $f(x_0)$ an!

Bei „sprunghafteren" Funktionen gilt das nicht:



$f(x) = \operatorname{sgn}(x)$

Nehmen wir $f\left(\frac{1}{n}\right)$:

$f\left(\frac{1}{n}\right) = 1$

Aber

$\frac{1}{n} \to 0$, während $f(0) = 0$ ist.

Wie beschreibt man das technisch sauber?

- Egal, <u>wie</u> man sich an x_0 annähert – die Folge von Funktionenwerten nähert sich schließlich $f(x_0)$

- Wenn man eine Schranke δ vorgibt, muß $|f(x_0)-f(x)|$ irgendwann kleiner werden als δ!

- „Irgendwann" heißt: Wenn x nah genug an x_0 rutscht!

- Was heißt „nah genug"? Es gibt irgendeine kleine Schranke ε!

<u>Wir fassen zusammen:</u>

Eine Funktion $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ heißt <u>stetig</u> im Punkt $x_0 \in X$, wenn

für jedes $\delta > 0$

ein $\varepsilon > 0$ existiert,

so dass für alle $x \in X$ gilt: $|x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| < \delta$.

Man schreibt auch vereinfachend:

$$x \to x_0 \implies f(x) \to f(x_0)$$

oder

$$f\left(\lim_{x \to x_0} x\right) = \lim_{x \to x_0} f(x) .$$

Das ist sehr wichtig:

Grenzwert- und Funktionsbildung darf man also nur in besonderen Situationen vertauschen!

Historische Fußnote:

Der heutige Stetigkeitsbegriff wurde erst von Cauchy (1789 - 1857) und Bolzano (1781 - 1848) präzisiert!