

Taylorreihen

(118)

8.1.02

(Nach Beweis
Taylor!)

Für beliebig oft differenzierbare Funktionen kann man die Taylorentwicklung immer weiter ausführen. Dabei ist wichtig, wie sich das Restglied

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(\xi) \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

verhält. Strebt dieses Restglied (also der Fehler bei der Entwicklung bis zur n -ten Ordnung) gegen Null, dann kann man guten Gewissens die Entwicklung „unendlich“ weit ausführen.

A150:

Ist $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar auf $[x_0, x] \subseteq X$ und strebt das Restglied $R_n(x) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, dann kann man

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

schreiben.

Beispiele für Taylorentwicklungen

Betrachte $f_1(t) = e^t$

$$f_2(t) = \sin t$$

$$f_3(t) = \cos t$$

und $x_0 = 0$.

Es gilt

$$f_1'(t) = e^t, f_1''(t) = e^t, \dots, f_1^{(k)}(t) = e^t$$

$$f_2'(t) = \cos t, f_2''(t) = -\sin t, \dots, f_2^{(2k)}(t) = (-1)^k \sin t$$

$$f_2^{(2k+1)}(t) = (-1)^k \cos t$$

$$f_3'(t) = -\sin t, f_3''(t) = -\cos t, \dots, f_3^{(2k)}(t) = (-1)^k \cos t$$

$$f_3^{(2k+1)}(t) = (-1)^{k+1} \sin t$$

also $f_1^{(k)}(x_0) = e^0 = 1$

$$\begin{cases} f_2^{(2k)}(x_0) = (-1)^k \sin 0 = 0 \\ f_2^{(2k+1)}(x_0) = (-1)^k \cos 0 = (-1)^k \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_3^{(2k)}(x_0) = (-1)^k \cos 0 = (-1)^k \\ f_3^{(2k+1)}(x_0) = (-1)^{k+1} \sin 0 = 0 \end{cases}$$

(120)

Mit dem Satz von Taylor n-ter Ordnung ergibt sich also:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos(\theta x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \sin(\theta x)$$

Betrachtet man die Restglieder, so ist also

$$R_n^{(1)}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}$$

$$R_{2n}^{(2)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos \theta x$$

$$R_{2n+1}^{(3)}(x) = (-1)^n \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \sin \theta x$$

(12)

Wie verhält sich das Restglied für $n \rightarrow \infty$?

Für fixes $x > 0$ ist bei $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} R_n^{(1)}(x) &= \frac{x \cdots x}{1 \cdots (n+1)} \cdot e^{\frac{1}{n+1}x} \\ &= \frac{x \cdots x}{1 \cdots [x]} \cdot \frac{x \cdots x}{[x+1] \cdots (n+1)} \cdot e^{\frac{1}{n+1}x} \\ &\quad \uparrow x \text{ abgerundet} \end{aligned}$$

$$\leq \left(x^{[x]} \cdot e^x \right) \cdot \frac{x \cdots x}{[x+1] \cdots (n+1)} \rightarrow 0$$

↓ für $n \rightarrow \infty$
0

Also gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n^{(1)}(x) = 0$

und wir können schreiben

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

(122)

Ebenso überlegt man sich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_{2n}^{(2)}(x) = 0$$

und $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{2n+1}^{(3)}(x) = 0$

und kann daher schreiben

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - + \dots$$

Andere Ableitungen und Reihen

$f(x)$	$f'(x)$	$T_{\infty}(x)$	Konvergenzbereich
$(1+x)^{\alpha}$	$\alpha(1+x)^{\alpha-1}$	$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$	$ x < 1$
$\ln(1+x)$	$\frac{1}{1+x}$	$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k!}$	$x < 1$ $-1 < x \leq 1$
$a^x = e^{x \ln a}$	$a^x \ln a$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x \ln a)^k}{k!}$	$x \in \mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$	$x \in \mathbb{R}$
e^x	e^x	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$	$x \in \mathbb{R}$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	(komplizierter)	$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	(komplizierter)	$0 < x < \pi$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k) (2k+1)} x^{2k+1}$	$-1 < x < 1$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k) (2k+1)} x^{2k+1}$	$-1 < x < 1$

