

Schnelldurchgang und Nachlese

Komplexe Zahlen

$$z = x + iy$$

oder auch

$$z = r \cdot e^{i\varphi}$$

mit $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Was hat $e^{i\varphi}$ mit e^x zu tun?

Betrachte

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \end{aligned}$$

Und

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \end{aligned}$$

Also ist

$$e^{ix} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} i^h x^h$$

$$\stackrel{(*)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k!} i^{2k} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} i^{2k+1} x^{2k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k!} (-1)^k x^{2k} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

$$= \cos x + i \sin x$$

(*) geht, weil beide reellen Reihen konvergieren!

Folgen und Reihen

Reihe	1	4	9	16	25	36	49	$\sum_{i=1}^n a_i$
Folge	1	3	5	7	9	11	13	a_i
Differenzfolge	2	2	2	2	2	2	2	$a_{i+1} - a_i$

Konkret: $\sum_{i=1}^n a_i = n^2$

$$a_i = 2i + 1$$

$$a_{i+1} - a_i = 2$$

Also: Ähnlichkeit zwischen: (1) Differenzenbildung
und Differenzieren

(2) Reihenbildung und Integrieren

Konkretes Beispiel war:

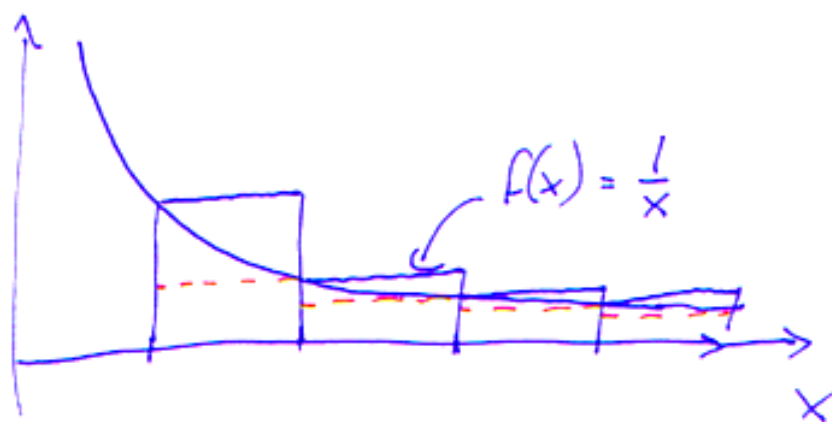
Harmonische Reihe:

$$H(n) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Wir haben gesehen:

$$\frac{1}{2} (1 + \log n) \leq H(n) \leq (1 + \log n)$$

Anders betrachtet:



$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \geq \int_1^n \frac{1}{x} dx \geq \sum_{i=2}^n \frac{1}{i}.$$

Also ist

$$H(n) \geq \lfloor \log n \rfloor \geq H(n) - 1$$

oder auch

$$\log n \leq H(n) \leq 1 + \log n$$

Allgemein ausgedrückt:

$$\sum_{i=1}^n f(i) \quad \text{hat für } n \rightarrow \infty$$

das gleiche Konvergenzverhalten wie

$$\int_1^n f(x) dx.$$

Wenn eines konvergiert, konvergiert auch das andere!

Außerdem ist für monoton fallendes f

$$\sum_{i=1}^n f(i) \geq \int_1^n f(x) dx \geq \sum_{i=2}^n f(i)$$

und

$$\int_1^n f(x) dx \geq \sum_{i=2}^n f(i) \geq \int_2^n f(x) dx.$$

Grenzwerte

- Grenzwertregeln

- Spezielle Techniken:

Z.B. Zerlegung in Differenzen von Reihen

Zerlegung in Teleskop-Reihen

(Wichtig also: Partialbruchzerlegung
Geometrische Reihe.)

- Regel von de l'Hopital :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Falls der rechte Grenzwert existiert, ggf. weiter differenzieren
bis es klappt!

Herleitung : Taylor!

Alternative : Taylorreihen einsetzen!

Differenzieren

- Allgemeine Regeln
- Spezielle Funktionen
- Anwendungen: Konvergenzdiskussion
Monotonizität
Newton-Verfahren

Satz von Taylor und Vorstufen

- Mittelwertsatz
- Entwicklung erster Ordnung
- Taylor n-ter Ordnung
- Restglied und Abschätzungen
- Rechnen mit Taylorreihen

Integrale

- Integrationsregeln
 - Spezielle Funktionen
 - Techniken : Substitution
Partielle Integration
- 

Lineare Algebra

- Vektoren und Rechnen mit Vektoren:
Betrag, Projektion, orthogonale Zerlegung
Skalarprodukt, Kreuzprodukt
- Gleichungen und Gleichungssysteme
→ Gaußverfahren und Lösungsmengen
- Matrizen und Rechnen mit Matrizen

– Linearkombinationen, Basis, Dimension

– Rang, Bild, Kern einer Matrix

– Determinanten:

Berechnungsverfahren (welche ??)
(wie ??)

(Noch eine Rechenregel:

$$\textcircled{4} \det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B)$$

– Anwendungen und Bedeutung von Determinanten:

– Cramersche Regel

– Lineare Abhängigkeit von Vektoren

– Invertierbarkeit einer Matrix

- Lineare Abbildungen
- Basis transformation
- Eigenwerte, Eigenvektoren, Diagonalisierung
- Orthonormalbasen, Gram-Schmidt-Verfahren
- Hauptachsen transformationen.