Dafür sind also zwei Dinge nötig:

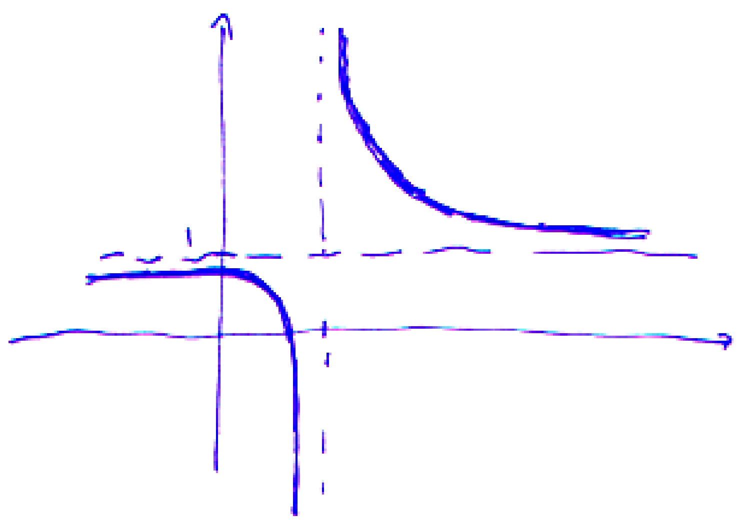
(1) Ein geeignetes Koordinatensystem finden, so dass die Achsen den Hauptachsen der Quadrik entsprechen.

(2) Den Ursprung in den Mittelpunkt der Quadrik verlegen.

Beispiel:

Quadrik in $\mathbb{R}^2$:

$$Q(\vec{x}) = 2xy - 2x - 2y + 1 = 0$$



Umgeschrieben:

$$Q(\vec{x}) = (x,y)\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \underbrace{(2,2)}_{\vec{b}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 1 = 0$$

Eigenwerte und Eigenräume der Matrix:

$$\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda-1)(\lambda+1),$$

also $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$

Eigenraum zu $\lambda_1 = 1$:

$$\operatorname{Kern}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \left\{\vec{v} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \vec{v} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$\downarrow$ Normalisiert: $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Eigenraum zu $\lambda_2 = -1$

$$\operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \left\{\vec{v} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \vec{v} = t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$\downarrow$ Normalisiert: $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bezüglich dieser Basis:

$$D = S^T A S \quad \text{mit} \quad S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(Was ist S für eine Transformation?

Eine Drehung um 45°:

$$S = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad \text{mit } \alpha = \frac{\pi}{4} \; ! \;)$$

Außerdem ergeben sich die neuen Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= S^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

und man erhält mit

$$\vec{b}' = S^T \vec{b}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mit

$$\vec{x}^T A \vec{x}^T = \vec{x}^T (S \cdot S^T) A \cdot (S \cdot S^T) \vec{x}$$

$$= (\vec{x}^T \cdot S) \cdot (S^T A S) \cdot S^T \vec{x}$$

$$= \vec{x}'^T \cdot D \cdot \vec{x}$$

also:
$$Q(\vec{x}') = \vec{x}'^T D \vec{x}' + \vec{b}' \vec{x}' + c \quad .$$

Konkret im Beispiel:
$$Q(\vec{x}') = (x', y') \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 2\sqrt{2}\, x' + 1 = 0$$

Mit quadratischer Ergänzung ergibt sich:
$$Q(\vec{x}') = (x'+\sqrt{2}, y') \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'+\sqrt{2} \\ y' \end{pmatrix} = 1$$

(Das entspricht einer Verschiebung des neuen Ursprungs um $\sqrt{2}$ in x'-Richtung – wie auch im Bild zu sehen!)

Also:

Hauptachsentransformation für Quadriken

Gegeben: A, $\vec{b}$, c

Gesucht: Normalform für $Q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x} + \vec{b}^T \vec{x} + c$.

Vorgehensweise:

(1) Diagonalisiere A.

(2) Verschiebe durch quadratische Ergänzung den Ursprung, so dass

$$Q(\vec{x}') = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i' - q_i') + c'$$

Feststellung:

Für die „Form" der Quadriken sind nur die Vorzeichen der Eigenwerte ausschlaggebend!

(3) Die wichtigsten Normalformen einer Quadrik sind

(a) Im $\mathbb{R}^2$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	Ellipse	(2 positive Eigenwerte)
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	Hyperbel	(1 positiver, 1 negativer Eigenwert)
$x^2 = 2py$	Parabel	(1 Eigenwert ist 0)

(b) Im $\mathbb{R}^3$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	Ellipsoid	(3 positive Eigenwerte)
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	einschaliges Hyperboloid	(2 positive Eigenwerte 1 negativer Eigenwert)
$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	zweischaliges Hyperboloid	(2 negative Eigenwerte 1 positiver Eigenwert)
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	elliptischer Doppelkegel	(2 positive Eigenwerte 1 negativer Eigenwert)
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$	elliptischer Paraboloid	(1 Eigenwert ist Null 2 positive Eigenwerte)
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$	hyperbolischer Paraboloid	(1 Eigenwert ist Null 1 positiver Eigenwert u. 1 negativer Eigenwert)
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	elliptischer Zylinder	(1 Eigenwert ist Null 2 positive Eigenwerte)
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	hyperbolischer Zylinder	(1 Eigenwert ist Null 1 positiver Eigenwert 1 negativer Eigenwert)