

Diagonalisierung

Eine lineare Abbildung hat besonders „übersichtliche“ Form, wenn (bezüglich einer geeigneten Basis) die zugehörige Matrix Diagonalform hat:

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Dann sind die Basisvektoren auf jeden Fall:

- Eigenvektoren

~~orthogonal zueinander~~

(Denn in dieser neuen Basis ist jeder Basisvektor durch einen Einheitsvektor dargestellt und es gilt $A' \cdot \vec{e}_i = \lambda_i \cdot \vec{e}_i$.)

Also:

Eine lineare Abbildung kann durch eine Diagonalmatrix beschrieben werden

$\Leftrightarrow$ Es existiert eine Basis aus Eigenvektoren.

Im Beispiel kann man $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
bezüglich der Basis

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

in Diagonalform bringen:

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Transformationsmatrix ist

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

und es ergibt sich

$$S^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} S^T$$

S transponiert
d.h. an der Hauptdiagonale
geklippt!

Besonders angenehm wäre:

Ist die Basis aus Eigenvektoren eine Orthonormalbasis, dann ist

$$(S^T \cdot S)_{ij} = \vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = \begin{cases} 1 & \text{für } i=j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

also gilt $S^T \cdot S = E_n$,

also $S^T = S^{-1}$

- und die Matrixinversion ist besonders einfach!

(- Denn wir müssen die Matrix S nur transponieren!)

$$(A \text{ symmetrisch} \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji})$$

Gute Nachricht:

Für eine reelle symmetrische Matrix A gilt:

- (1) Es gibt n reelle Nullstellen des charakteristischen Polynoms
- (2) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.
- (3) Es gibt eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren.
- (4) Die Matrix ist auf jeden Fall diagonalisierbar.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ ist symmetrisch!}$$

Für die Vektoren von vorher:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{gilt } \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0, \quad \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = 0, \quad \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = 0.$$

Für eine Orthonormalbasis muss man also nur noch die Vektoren normieren:

$$\vec{b}_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Dann ist } S = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{und } S^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hauptachsentransformation

Verallgemeinerung von Geraden, Ebenen etc.:

Quadriken

Die Menge der Punkte $\vec{x} \in \mathbb{R}_n$, die eine Gleichung

$$Q(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i + c = 0$$

erfüllen, heißt Quadrik

Im $\mathbb{R}^2$ sind das sog. Kegelschnitte
($\rightarrow$ Ellipse, Parabel, Hyperbel)

Im $\mathbb{R}^3$ sind das quadratische Flächen.

Schreibweise:

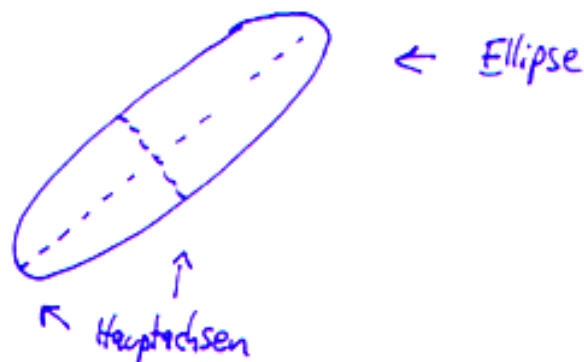
$$Q(\vec{x}) = (x_1, \dots, x_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + (b_1, \dots, b_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + c$$

$$= \vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x} + \vec{b}^T \cdot \vec{x} + c$$

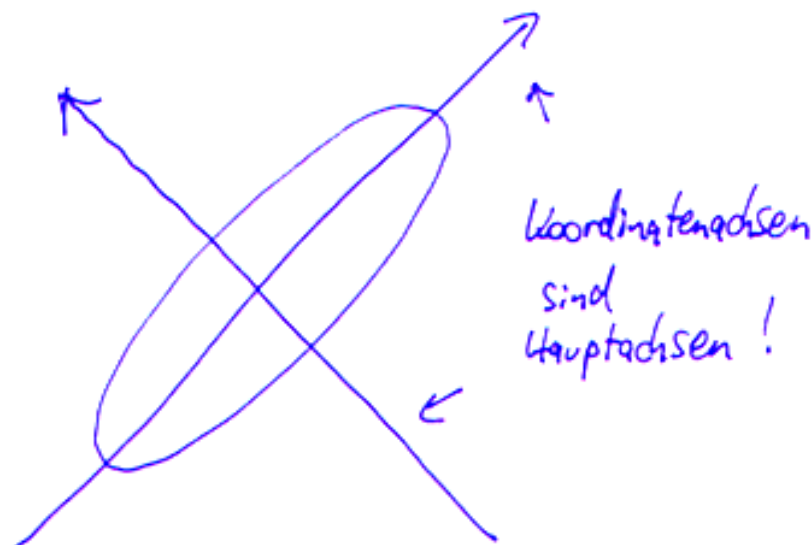
mit $A = A^T$.

Ziel: Quadrik auf Normalform bringen,
d.h. A auf Diagonalform!

(Geometrische Motivation:



Besseres Bezugssystem:



In dieser Darstellung hat die Ellipse die Darstellung

$$x'^2 + dy'^2 = e^2 \quad \text{oder}$$

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = e^2 = 0$$