

Wie berechnet man Eigenwerte?

(1) Bestimme  $\det(A - \lambda E_n)$

Das ist für unbekanntes  $\lambda$  ein Polynom in  $\lambda$   
 - das sogenannte charakteristische Polynom  $f(\lambda)$

(2) Bestimme die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

Wichtig dabei ist auch jeweils die Vielfachheit  
 - denn das liefert Zusatzinformationen für den  
 dritten Schritt:

(3) Bestimme für jeden Eigenwert  $\lambda_i$   
 den Kern von  $(A - \lambda_i E_n)$

Dies ist jeweils der zugehörige Eigenraum.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Schritt: Berechne  $f(\lambda)$ :

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 2-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda)(4-\lambda) \\ &\quad - 4(2-\lambda) - 4(4-\lambda) \\ &= -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 18\lambda \\ &= -\lambda(\lambda^2 - 9\lambda + 18) \\ &= -\lambda(\lambda-3)(\lambda-6) \end{aligned}$$

2. Schritt: Nullstellen von  $f(\lambda)$ 

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 6.$$

3. Schritt: Eigenvektoren!

(a) Betrachte  $\lambda_1 = 0$ , also

$$\ker(A - \lambda_1 E_n) = \ker(A):$$

also

$$3x + 2y - 2z = 0$$

$$2x + 2y = 0$$

$$-2x + 4z = 0$$

Als Lösungsmenge ergibt sich

$$\ker A = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \mid v = t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Mit  $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  ist auch  $t \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  Eigenvektor zum

Eigenwert 0; es reicht also, wenn wir den

Basisvektor  $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  festhalten!

Probe:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

✓

(b) Für  $\lambda_2 = 3$  betrachte  
 Kern  $(A - \lambda_2 E_n)$ ,  
 also das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} 2y - 2z & = & 0 \\ 2x - y & = & 0 \\ -2x & + & z = 0 \end{array}$$

$$\text{(denn } A - 3E_n = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot I)$$

Lösungsmenge:

$$\left\{ v \in \mathbb{R}^3 \mid v = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Probe:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(c) Für  $\lambda_3 = 6$  betrachte

Kern  $(A - \lambda_3 E_n)$ , d.h. Kern  $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$   
 also das Gleichungssystem

$$-3x + 2y - 2z = 0$$

$$2x - 4y = 0$$

$$-2x \quad -2z = 0$$

Lösungsmenge:

$$\left\{ v \in \mathbb{R}^3 \mid v = t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Probe:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix} = 6 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$