

(I) Orthogonalbasen:

Eine Menge von Vektoren $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ ist eine Orthogonalbasis eines Unterraumes U von $\mathbb{R}^n$, wenn

- (i) $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ eine Basis von U ist
(also: ein linear unabhängiges Erzeugendensystem)
- (ii) je zwei Vektoren senkrecht aufeinanderstehen, o
(also: $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = 0$ für $i \neq j$).

Wenn man noch ein bisschen mehr verlangt, hat man

(I*) Orthonormalbasen:

Zusätzlich gilt

$$\|\vec{v}_i\| = 1$$

also

$$\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = \begin{cases} 1 & \text{für } i=j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Fragen:

- Hat ein Unterraum immer eine Orthonormalbasis?
- Wie bekommt man eine Orthonormalbasis?

Beispiel:

Betrachte den von

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

aufgespannten Unterraum U von $\mathbb{R}^4$

Gesucht: Eine Orthonormalbasis von U .

Stärker: Eine Orthonormalbasis $\{\vec{v}'_1, \vec{v}'_2, \vec{v}'_3\}$ von U ,

so dass

$$\text{span}(\vec{v}_1) = \text{span}(\vec{v}'_1)$$

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \text{span}(\vec{v}'_1, \vec{v}'_2)$$

$$\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \text{span}(\vec{v}'_1, \vec{v}'_2, \vec{v}'_3)$$

ist.

Was ist zu tun?

(1) Normiere $\vec{v}_i$ zu $\vec{v}_i'$, d.h. setze

$$\vec{v}_i' = \frac{\vec{v}_i}{\|\vec{v}_i\|}$$

(Im Beispiel:

$$\vec{v}_1' = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+2^2+1^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

(2) Angenommen, wir kennen $\vec{v}_1', \dots, \vec{v}_k'$.

Dann zerlege $\vec{v}_{k+1}$:

$$\vec{v}_{k+1} = \vec{v}_{k+1}^{\parallel} + \vec{v}_{k+1}^{\perp}$$

mit $\vec{v}_{k+1}^{\parallel} \in \text{span}(\vec{v}_1', \dots, \vec{v}_k')$, also

$$\vec{v}_{k+1}^{\parallel} = \sum_{i=1}^k (\vec{v}_i' \cdot \vec{v}_{k+1}) \cdot \vec{v}_i' , \quad \text{damit}$$

$$\vec{v}_{k+1}^{\perp} = \vec{v}_{k+1} - \vec{v}_{k+1}^{\parallel} = \vec{v}_{k+1} - \sum_{i=1}^k (\vec{v}_i' \cdot \vec{v}_{k+1}) \cdot \vec{v}_i' .$$

Und dann

$$\vec{v}_{k+1}' = \frac{\vec{v}_{k+1}^{\perp}}{\|\vec{v}_{k+1}^{\perp}\|} .$$

Im Beispiel:

Für $k=1$ sucht man den Vektor $\vec{v}_{k+1}^{\perp}$ unter Kenntnis von $\vec{v}_1^{\perp}$, also

$$\vec{v}_2^{\perp} = \vec{v}_2 - \sum_{i=1}^1 (\vec{v}_i^{\perp} \cdot \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_i^{\perp} ,$$

d.h. konkret

$$\vec{v}_2^{\perp} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} - \frac{25}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

und $\|\vec{v}_2^{\perp}\| = \sqrt{24}$, d.h.

$$\vec{v}_2^{\perp} = \frac{1}{\sqrt{24}} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Für $k=2$ sucht man $\vec{V}_3^\perp$ unter Kenntnis von $\vec{V}_1^\perp$ und $\vec{V}_2^\perp$, also

$$\vec{V}_3^\perp = \vec{V}_3 - \sum_{i=1}^2 (\vec{V}_i^\perp \cdot \vec{V}_3) \cdot \vec{V}_i^\perp,$$

d.h.

$$\begin{aligned} \vec{V}_3^\perp &= \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &\quad - \left(\frac{1}{\sqrt{24}} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{24}} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} - \frac{25}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &\quad - \frac{24}{\sqrt{24}} \cdot \frac{1}{\sqrt{24}} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und daher

$$\vec{v}_3' = \frac{\vec{v}_3^\perp}{\|\vec{v}_3^\perp\|} = \frac{1}{\sqrt{44}} \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dieses Verfahren nennt man das

Gram-Schmidt'sche Orthonormierungsverfahren.