

und daher

$$\vec{v}_3 = \frac{\vec{v}_3^\perp}{\|\vec{v}_3^\perp\|} = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dieses Verfahren nennt man das

Gram-Schmidt'sche Orthonormierungsverfahren.

EIGENWERTE und EIGENVEKTOREN

Ein Vektor $\vec{v}$ heißt Eigenvektor einer Matrix A ,
wenn es eine Zahl λ gibt mit

$$A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}.$$

So ein λ heißt Eigenwert.

Beispiel:
 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$,
 Eigenvektoren sind
 $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 2$
 $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = 3$

Eigenwerte und Eigenvektoren spielen eine wichtige
Rolle in verschiedenen Anwendungen!

(Ein wichtiges Beispiel sind gekoppelte Schwingungen,
die man in Eigenschwingungen zerlegt - die
zugehörigen Frequenzen heißen „Eigenfrequenzen“!

Aber auch in anderen Zusammenhängen
- selbst in der Suchmaschine Google werden
Eigenwerte verwendet!)

Wichtige Fragen:

- (1) Wie viele Eigenwerte kann eine Matrix haben?
- (2) Wie findet man sie?
- (3) Wie bestimmt man die zugehörigen Eigenvektoren?

Betrachten wir also die Gleichung

$$A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$$

(Da $A \cdot \vec{v}$ die gleiche Dimension wie $\lambda \cdot \vec{v}$ haben soll,
muss A quadratisch sein!)

Das kann man umschreiben:

$$A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Einheitsmatrix!}}}{E_n} \cdot \vec{v}$$

Also $A \cdot \vec{v} - \lambda \cdot E_n \cdot \vec{v} = \vec{0}$

oder $(A - \lambda E_n) \cdot \vec{v} = \vec{0}.$

Damit ist also $\vec{v} \in \text{Kern}(A - \lambda E_n)$,
d.h. die Spalten von $(A - \lambda E_n)$ sind
linear abhängig!

D.h. also:

$$\det(A - \lambda E_n) = 0$$

Im Beispiel:

$$\det \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 0$$

also

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0,$$

$$\text{d.h.} \quad (2-\lambda)(3-\lambda) = 0,$$

$$\text{Somit} \quad \lambda = 2$$

$$\text{oder} \quad \lambda = 3.$$