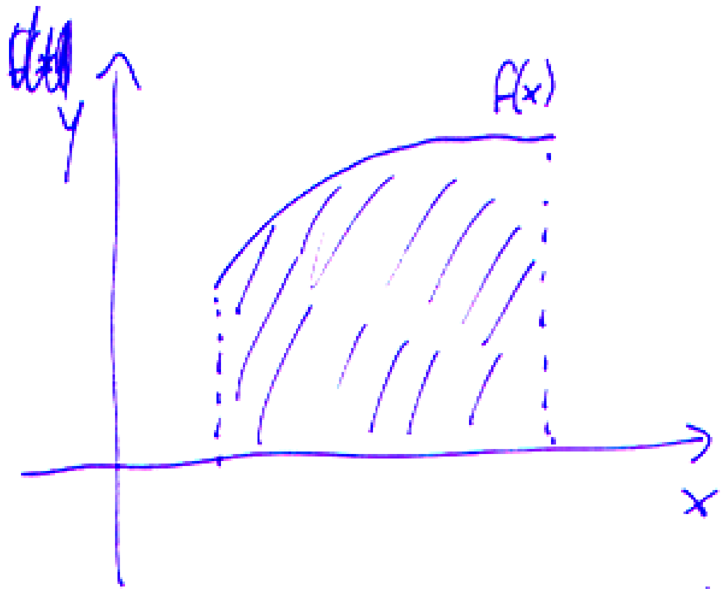
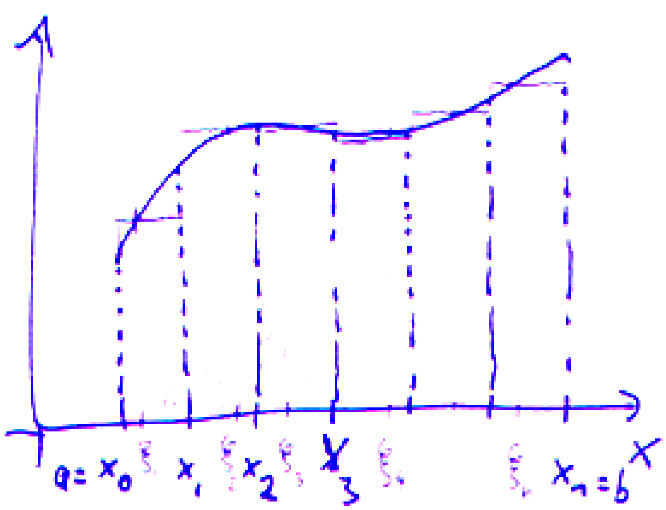
# Integration und Flächenberechnung

(1) Betrachten wir eine Funktion $f(x)$:




Wie berechnet man den Flächeninhalt „unter" der durch $(x, f(x))$ gegebenen Kurve (d.h. zwischen der Kurve und der x-Achse)?

Man nähert die Fläche durch eine Menge von Rechtecken an:



Diese Näherung ergibt also eine Summe von Rechtecken:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot f(\xi_i) = S(X, \Xi)$$

– das ist also genau der Ausdruck, den wir bei der Integration von f betrachtet hatten!

<u>Also:</u>

Für eine integrierbare Funktion

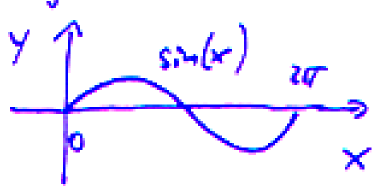
$$f : [a,b] \to \mathbb{R}$$

entspricht der Wert des Integrales

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

genau dem (mit Vorzeichen versehenen) Flächeninhalt zwischen der Kurve $(x, f(x))$ und der x-Achse.

Beachte dabei: Fläche „unter" der x-Achse zählt negativ, also z. B.




$$\int_0^{2\pi} \sin x\, dx = \left[-\cos x\right]_0^{2\pi} = 0.$$

~~Physikalische Arbeit und Flächenberechnung mit Integralen~~

~~Vorab eine physikalische Motivation:~~

**Beispiel**: Arbeit und Kraft

(a) Bekannter Merksatz: „Arbeit ist Kraft mal Weg".

Gilt für konstante Kraft, also $A = K \cdot s = K \cdot (b-a)$

Ist die Kraft örtlich variabel, also $K(x)$,

dann muss man das Integral betrachten:

$$A(x) = \int_a^b -K(x)\,dx.$$

(Vorzeichen wichtig, denn es geht um Arbeit gegen die wirkende Kraft!)

Beispiel: Arbeit (oder auch Energie), die notwendig ist, um eine Rakete gegen die Erdanziehungskraft von der Erdoberfläche (Erdradius $R$) auf die Höhe $h$ über dem Erdmittelpunkt zu bringen.

Nach Newtonschem Gravitationsgesetz ist $K(x) = -G\,\frac{mM}{x^2}$.

Also erhält man

$$A(h) = \int_R^h G\,\frac{mM}{x^2}\,dx = GmM \int_R^h \frac{1}{x^2}\,dx = GmM\left[-\frac{1}{x}\right]_R^h$$

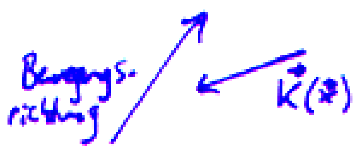
$$= GmM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{h}\right).$$

Der Grenzwert

$$\lim_{h\to\infty} A(h) = \frac{GmM}{R}$$

ist die Arbeit, die geleistet werden muss, um die Rakete aus dem Schwerefeld der Erde zu bringen.

(b) Schwieriger wird es, wenn Kraft und Weg Vektoren sind. Dann muss man den Anteil der Kraft entlang des Weges betrachten:




Dafür integriert man des Skalarprodukt von Kraft und Weg

$\hookrightarrow$ mehr dazu in Analysis II!