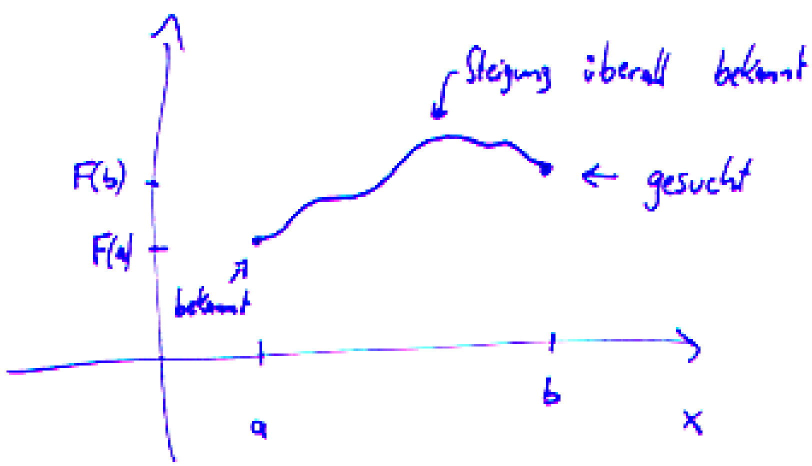
# Bestimmte Integrale

**Aufgabenstellung:**

Gegeben: Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, $I = [a, b]$
und ein „Startwert" $F(a) = F_a$

Gesucht: „Zielwert" $F(b)$ einer Funktion
$$F : I \to \mathbb{R},$$
die auf ganz $I$ differenzierbar ist
und überall die Ableitung $F' = f$ hat
– sowie die „Startbedingung"
$$F(a) = F_a \quad .$$
erfüllt.

Also:



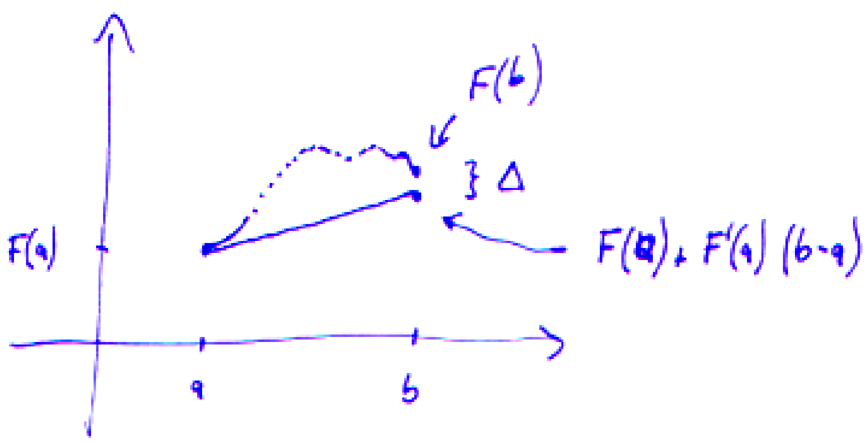

⚠ Das ist NICHT der Graph von f!

(Beispiel: Höhe eines Objektes bei bekannter Steig- oder Sinkrate und bekannter Anfangshöhe!)

Diese Aufgabenstellung kennen wir schon sehr ähnlich aus der Differentialrechnung!

Eine Schätzung können wir abgeben, indem wir linear extrapolieren:

$$F(b) = F(a) + \overbrace{F'(a)}^{f(a)} (b-a) + \underbrace{\Delta}_{\text{Fehler}}$$




Eine andere Möglichkeit liefert der Mittelwertsatz!
Mit der „richtigen" Steigung an einer Stelle $\xi \in ]a,b[$ ist

$$F(b) = F(a) + f(\xi)(b-a) \qquad \leftarrow \text{kein Fehler!}$$

<u>Schwierigkeit:</u> Wir wissen nur wenig über $\xi$, also über $f(\xi)$, daher kennen wir $F(b)$ damit noch nicht!

**Ausweg:** Man zerlegt das Intervall $[a,b]$ in feinere Intervalle:

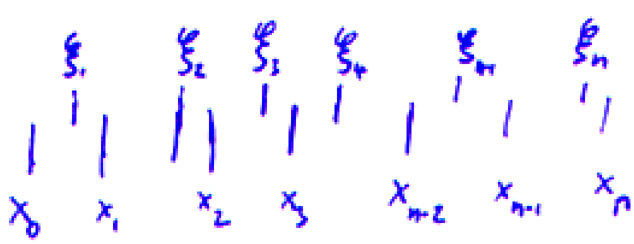
$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b .$$

Dann betrachtet man die Intervalle einzeln; für jedes Teilintervall bekommt man einen eigenen Wert $\xi_i \in \, ]x_{i-1}, x_i[$ .

Wenn $f$ nicht zu stark schwankt, dann bekommt man damit immer genauere Abschätzungen.

(Vorstellung: Wir überprüfen öfter unsere Steig- oder Sinkgeschwindigkeit!)

Also:




Mit einer Unterteilung $X = \{x_0, \dots, x_n\}$

und Zwischenwerten $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$,

$\xi_i \in \, ]x_{i-1}, x_i[$

bekommt man eine Abschätzung für $F(b)$:

Diese ist

$$F(a) + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})}_{S(X, \Xi)}$$

<u>Idee:</u> Wenn $f$ „gutartig" ist, dann wird diese Schätzung beliebig genau, wenn $X$ beliebig fein wird, d.h. für $\max_i (x_i - x_{i-1}) \to 0$

(also wenn die Intervalle beliebig klein werden)

Eine derartig gutartige Funktion nennt man <u>Riemann-integrierbar</u> oder auch <u>R-integrierbar</u>.

Man schreibt für den Grenzwert von $S(X, \Xi)$

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Gute Nachricht:

Jede stetige Funktion $f$ ist $R$-integrierbar!

Noch bessere Nachricht:

Es reicht, wenn die Funktion <u>stückweise stetig</u> ist, d.h. nur eine begrenzte Zahl von Unstetigkeitsstellen hat.

<u>Also:</u>

**Erster Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung**

Hat $F$ auf dem Intervall $[a,b]$ eine $R$-integrierbare Ableitung (z.B. eine stetige Ableitung), dann ist

$$F(b) = F(a) + \int_a^b F'(x)\,dx ,$$

also auch

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Ein wenig allgemeiner:

Dies gilt für jedes beliebige $b$; wenn wir die Sache für alle $b$ ausdrücken (und das durch Wahl des Buchstabens $x$ betonen), dann wird daraus

$$\boxed{F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)\,dt}.$$

Das ist der gleiche Sachverhalt mit geringfügig anderen Buchstaben – aber der Witz liegt jetzt darin, dass man $F$ als Funktion von $x$ auffassen kann!

---

Noch eine Schreibweise:

Für $F(b) - F(a)$ benutzt man oft

$$\left[F(x)\right]_a^b .$$

Damit ist z.B.

$$\int_2^3 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{19}{3}.$$