

Satz v. Taylor zur lokalen Vereinfachung.

Nicht nur der Grenzwert wird beschrieben, sondern auch das lokale Verhalten.

Beispiel: Mathematisches Pendel



Ein Objekt der Masse m (punktförmig) hängt an einer (gewichtlosen) Schnur der Länge l . Gravitationskraft: mg .

Bei einem Auslenkungswinkel φ wirkt eine anteilige Kraft von mg senkrecht auf die Schnurrichtung, die das Pendel zum tiefsten Punkt zieht.

Also gilt

$$l \cdot \varphi'' = -g \sin \varphi$$

(Dies ist eine Differentialgleichung $\rightarrow$ nächstes Semester!)

Das ist so nicht so einfach zu lösen!

(Wer's genau wissen will:

Mit $k = \sin \frac{\varphi_0}{2}$ ergibt sich

$$\sqrt{\frac{g}{L}} t = \int_0^{\psi} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} d\psi =: F(k, \psi)$$

Rechts steht ein sogenanntes „elliptisches Integral“, das man nicht mit elementaren Funktionen ausdrücken kann, für das es also keine „geschlossene Form“ gibt.)

Ausweg: Für kleines φ (also in der Nähe des tiefsten Punktes) ist

$$\sin \varphi \approx \varphi$$

und man erhält vereinfacht

$$L \cdot \varphi''(t) = -g \varphi(t)$$

sucht also eine Funktion, die zweimal abgeleitet ein negatives Vielfaches von sich selbst ergibt.

Eine Lösung mit $\varphi(0) = 0$ ist

$$\varphi(t) = \sin \left(\sqrt{\frac{g}{L}} t \right),$$

also eine harmonische Schwingung mit einer Schwingungsdauer, die nur von L abhängt.

Genauere Lösung?

Höhere Entwicklung liefert für die Schwingungsdauer

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \left(1 + \frac{\varphi_0^2}{16} \right) \quad (\varphi_0 \text{ in Radianten})$$

- das ist bei Amplituden von 70° bis auf 1% richtig!

Unbestimmte Integrale:

Sucht man zu einer gegebenen Ableitungsfunktion $F = F'$ eine „ursprüngliche“ Funktion F , die durch Ableiten F' ergibt, so versucht man also das Differenzieren umzukehren, d.h. man sucht eine Stammfunktion.

Man schreibt dafür auch

$$\int f(x) dx \quad \text{oder} \quad \int F dx$$

auf einem Intervall I ;

$$\int f(x) dx = F(x) \quad \text{auf } I$$

$$\text{oder} \quad \int f dx = F \quad \text{auf } I$$

heißt also, dass F Stammfunktion von f auf I ist.

Beobachtung:

Sind F_1 und F_2 zwei Stammfunktionen von f auf I , so muss die Differenz $(F_1 - F_2)$ abgeleitet

gerade $(F_1 - F_2)' = F_1' - F_2' = f - f = 0$ sein.

Nach Mittelwertsatz gilt für irgendeinen Bezugspunkt x_0 und jedes beliebige $x \in I$ aber

$$\begin{aligned} (F_1(x) - F_2(x)) &= (F_1(x_0) - F_2(x_0)) + (x - x_0) (F_1'(\xi) - F_2'(\xi)) \\ &= (F_1(x_0) - F_2(x_0)) + 0 \end{aligned}$$

Also gilt $F_2(x) = F_1(x) + C$

mit einer Konstanten $C = F_2(x_0) - F_1(x_0)$

Also:

Ist F eine Stammfunktion von f auf I ,
dann erhält man die Menge aller Stammfunktionen
von f durch

$$F + C \quad \text{mit } C \in \mathbb{R}$$

Als Umkehrung der Differentiation ist für die Integration

$$\frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x)$$

und $\int \frac{d f(x)}{dx} dx = f(x) + C$

Jede Differenzierungsformel liefert also sofort eine Integrationsformel!

Man erhält damit also z.B. die folgende Tabelle:

$$(1) \quad \int c dx = cx \quad \text{auf } \mathbb{R} \quad \text{für jedes konstante } c$$

$$(2) \quad \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad \text{auf } \begin{cases} \mathbb{R} & \text{für } \alpha \in \mathbb{N} \\ \mathbb{R} \setminus \{0\} & \text{für } \alpha = -2, -3, \dots \\ \mathbb{R}^+ & \text{für beliebiges } \alpha \neq -1 \end{cases}$$

$$(\text{Spezialfälle: } \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}$$

$$\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \sqrt{x^3}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \quad \text{auf geeigneten Intervallen.})$$

$$(3) \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| \quad \text{auf } \mathbb{R}^- \text{ und } \mathbb{R}^+$$

$$(4) \quad \int e^x dx = e^x \quad \text{auf } \mathbb{R}$$

$$(5) \quad \int \cos x dx = \sin x \quad \text{und} \quad \int \sin x dx = -\cos x \quad \text{auf } \mathbb{R}$$

$$(6) \quad \int \cosh x dx = \sinh x \quad \text{und} \quad \int \sinh x dx = \cosh x \quad \text{auf } \mathbb{R}$$

$$(7) \quad \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \quad \text{auf } \mathbb{R}$$

$$(8) \quad \int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| = \begin{cases} \operatorname{Arctanh} x & \text{auf }]-1, 1[\\ \operatorname{Arcoth} x & \text{auf }]-\infty, -1[\text{ und }]1, \infty[\end{cases}$$

$$(9) \quad \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \operatorname{Arsinh} x \quad \text{auf } \mathbb{R}$$

$$(10) \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x \quad \text{auf }]-1, 1[$$

$$(11) \quad \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2-1} \right| = \begin{cases} \operatorname{Arcoth} x & \text{auf }]1, \infty[\\ -\operatorname{Arcoth}(x) & \text{auf }]-\infty, -1[\end{cases}$$

Eine ganze Reihe von anderen Integralen
kann man in einschlägigen Tabellenwerken nachsehen,
z.B. "BRONSTEIN - SEMENDJAJEW"

Beispiele: (jeweils mit geeigneten Intervallen!)

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x$$

$$\int \frac{1}{\cosh^2 x} dx = \tanh x$$

$$\int \frac{1}{\sinh^2 x} dx = -\coth x$$

$$\int \tan x dx = -\ln |\cos x|$$

$$\int \cot x dx = \ln |\sin x|$$

$$\int \tanh x dx = \ln \cosh x$$

$$\int \coth x dx = \ln |\sinh x|$$

$$\int (\cos \alpha x \cdot \cos \beta x) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(\alpha+\beta)x}{\alpha+\beta} + \frac{\sin(\alpha-\beta)x}{\alpha-\beta} \right)$$

mit $|\alpha| \neq |\beta|$

$$\int e^{ax} \cos(\alpha x + \beta) dx = \frac{a \cos(\alpha x + \beta) + \alpha \sin(\alpha x + \beta)}{a^2 + \alpha^2} \cdot e^{ax}$$

mit $a^2 + \alpha^2 \neq 0$

Regeln für unbestimmte Integrale

(I) Linearität des Integrals:

$$\int (a_1 f_1 + \dots + a_n f_n) dx = a_1 \int f_1 dx + \dots + a_n \int f_n dx$$

(II) Produktregel oder partielle Integration:

$$\int f g dx = F g - \int F g' dx$$

(Denn durch Ableiten von Fg erhält man $f g + F g' !$)

(III) Kettenregel

$$\int (f \circ g) g' dx = F \circ g$$

oder eben auch

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = F(g(x))$$

Andere Formulierung:

IV Substitutionsregel

- (Voraussetzungen: (a) $f: I \rightarrow \mathbb{R}$
(b) $g: J \rightarrow I$ mit $g(J) = I$
(c) g differenzierbar auf J mit $g'(t) \neq 0 \rightarrow$ Also existiert $g^{-1}!$
(d) $(f \circ g) \cdot g'$ hat Stammfunktion ϕ auf J .)

Dann ist $F(x) = \phi(g^{-1}(x))$ Stammfunktion von f , kurz

$$\int f(x) dx = \left[\int f(g(t)) g'(t) dt \right]_{t=g^{-1}(x)} \text{ auf } I$$

Beispiele für Anwendungen der partiellen Integration:
(immer auf geeigneten Intervallen!)

$$(a) \quad \int \ln x \, dx = \int 1 \cdot \ln x \, dx$$

~~mit~~

$$= x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

$$= x \ln x - x$$

$$(b) \quad \int x^n e^x \, dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x \, dx$$

(mit $n \geq 2$,
ganze!)

$$= x^n e^x - n \left(x^{n-1} e^x - (n-1) \int x^{n-2} e^x \, dx \right)$$

$$= x^n e^x - n x^{n-1} e^x + n(n-1) \int x^{n-2} e^x \, dx$$

Das kann man immer weiter fortsetzen, bis
die Potenz von x „verlöffenzet“ ist!

Beispiele für Kettenregel:

$$(c) \quad \int \frac{e^x}{5+2e^x} \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{2e^x}{5+2e^x} \, dx = \frac{1}{2} \ln(5+2e^x)$$

$$(d) \quad \int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \, dx = 2 \sqrt{\sin x}$$

$$\left(\text{Allgemein: } \int \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}} \, dx = 2 \sqrt{g(x)} \right) !$$

Beispiel für Substitutionsregel.

$$(e) \quad \int \sqrt{r^2 - x^2} \, dx \quad \text{mit } r > 0$$

(Tausch auf bei Integration über Kreis mit Radius r !)

Substitution: $x = r \cdot \sin t$

Formel abgeleitet: $dx = r \cdot \cos t \, dt$, also

$$\int \sqrt{r^2 - x^2} \, dx = \left(\int \sqrt{r^2 (1 - \sin^2 t)} \, r \cos t \, dt \right)_{t = \arcsin\left(\frac{x}{r}\right)}$$

$$= r^2 \int \cos^2 t \, dt$$

$$= r^2 \frac{\sin 2t + 2t}{4} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{Rechnung} \\ \text{nachrechnen,} \\ \text{Additionstheorem einsetzen!} \end{array}$$

$$= r^2 \frac{2 \sin t \cos t + 2t}{4}$$

$$= r^2 \frac{\sin t \sqrt{1 - \sin^2 t} + t}{2}$$

$$= \frac{r \sin t \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t} + r^2 t}{2}$$

Also $\int \sqrt{r^2 - x^2} \, dx = \frac{1}{2} x \sqrt{r^2 - x^2} + \frac{1}{2} r^2 \arcsin \frac{x}{r} \quad \text{auf }]-r, r[$

Integration rationaler Funktionen

Betrachte $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$ mit Polynomen $p(x)$ und $q(x)$

Schritte:

- (1) Zerlege $\frac{p(x)}{q(x)}$ durch Division in ein Polynom und einen echten Rest:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \bar{p}(x) + \frac{r(x)}{q(x)} \quad \text{mit } \text{Grad } r < \text{Grad } q$$

Integriere $\bar{p}(x)$ und $\frac{r(x)}{q(x)}$ getrennt; betrachte also noch $\int \frac{r(x)}{q(x)} dx$.

- (2) Zerlege den Nenner $q(x)$ in die Form

$$q(x) = q (x-x_1)^{n_1} \cdots (x-x_m)^{n_m} \cdot (x^2+a_1x+b_1)^{e_1} \cdots (x^2+a_sx+b_s)^{e_s}$$

(Dabei sind $x_1, \dots, x_m$ die Nullstellen von q ,
während $(x^2+a_1x+b_1), \dots, (x^2+a_sx+b_s)$ keine Nullstellen haben.)

- (3) Zerlege $\frac{r(x)}{q(x)}$ in die Summe

$$\begin{aligned} \frac{r(x)}{q(x)} = & \left(\frac{a_{11}}{x-x_1} + \dots + \frac{a_{1n_1}}{(x-x_1)^{n_1}} \right) \\ & + \left(\frac{a_{m1}}{x-x_m} + \dots + \frac{a_{mn_m}}{(x-x_m)^{n_m}} \right) \\ & + \left(\frac{\alpha_{11}x + \beta_{11}}{x^2+a_1x+b_1} + \dots + \frac{\alpha_{1e_1}x + \beta_{1e_1}}{(x^2+a_1x+b_1)^{e_1}} \right) + \dots + \left(\frac{\alpha_{s1}x + \beta_{s1}}{x^2+a_sx+b_s} + \dots + \frac{\alpha_{se_s}x + \beta_{se_s}}{(x^2+a_sx+b_s)^{e_s}} \right) \end{aligned}$$

(4) Integriere die Ausdrücke in der Summe einzeln:

$$(a) \int \frac{1}{(x-c)^m} dx = \begin{cases} -\frac{1}{m-1} \frac{1}{(x-c)^{m-1}} & \text{für } m > 1 \\ \ln|x-c| & \text{für } m = 1 \end{cases}$$

$$(b) \int \frac{1}{x^2+qx+b} dx = \frac{2}{\sqrt{4b-q^2}} \arctan \frac{2x+q}{\sqrt{4b-q^2}}$$

$$(c) \int \frac{1}{(x^2+qx+b)^m} dx = \frac{2x+q}{(m-1)(4b-q^2)(x^2+qx+b)^{m-1}} + \frac{2(2m-3)}{(m-1)(4b-q^2)} \int \frac{1}{(x^2+qx+b)^{m-1}} dx \quad (m \geq 2)$$

$$(d) \int \frac{\alpha x + \beta}{x^2+qx+b} dx = \frac{\alpha}{2} \ln(x^2+qx+b) + \left(\beta - \frac{\alpha q}{2}\right) \int \frac{1}{x^2+qx+b} dx$$

$$(e) \int \frac{\alpha x + \beta}{(x^2+qx+b)^m} dx = \frac{\alpha}{2(m-1)(x^2+qx+b)^{m-1}} + \left(\beta - \frac{\alpha q}{2}\right) \int \frac{1}{(x^2+qx+b)^m} dx \quad (m \geq 2)$$

Anders (kurz!) gefasst:

- (1) Polynomdivision
- (2) Faktorisierung des Nenners
- (3) Partialbruchzerlegung
- (4) Integration der Teilbrüche
(durch partielle Integration bei höheren Exponenten)