Höhere Ableitungen

Durch Differenzien einer Funktion

$$f : X \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x)$$

erhält man eine neue Funktion

$$f' : X \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f'(x) \, ,$$

die beschreibt, wie stark sich f an einer Stelle x ändert. (Geometrische Vorstellung, wie schon mehrfach betont: Steigung der Tangente!)

Auch für diese Funktion kann man natürlich die gleichen Überlegungen anstellen – also die durchschnittliche Steigung über ein Intervall betrachten, damit also den Differenzenquotienten und (wenn die Grenzwertbildung klappt) dann eben auch den Grenzwert, also die Ableitung.

Oft ist es gerade wichtig, das nicht als völlig getrennten Vorgang zu sehen, sondern eben auf die ursprüngliche Funktion zu beziehen.

Entsprechend nennt man

- die Ableitung der Ableitungsfunktion die <u>zweite Ableitung</u> (und schreibt $f''(x)$)

- die Ableitung der $(n-1)$-ten Ableitungsfunktion (wenn es sie gibt!) die n-te Ableitung. (Hier schreibt man $f^{(n)}(x)$!)

Beispiel:

Funktion $f(x)$: Ort zum Zeitpunkt x

Ableitung $f'(x)$: Ortsänderung zum Zeitpunkt x
$\rightarrow$ „Geschwindigkeit"!

Zweite Ableitung $f''(x)$: Geschwindigkeitsänderung zum Zeitpunkt x
$\rightarrow$ „Beschleunigung"!

Dritte Ableitung $f'''(x)$: Änderung der Beschleunigung zum Zeitpunkt x
(Kein Umgangsbegriff!)

Manchmal kennt man nur ~~die~~ die höhere Ableitung, aber nicht die Funktion selbst.

(Beispiel:

Freier Fall ohne Luftwiderstand!

$$f''(x) = -g$$

↑ Gravitationsbeschleunigung: $g = 9{,}81 \frac{m}{s^2}$ in unseren Breiten.

Sucht man eine Funktion, deren Ableitung man kennt, dann fragt man nach einer „Stammfunktion".

Also: $f(x)$ ist Stammfunktion von $f'(x)$.

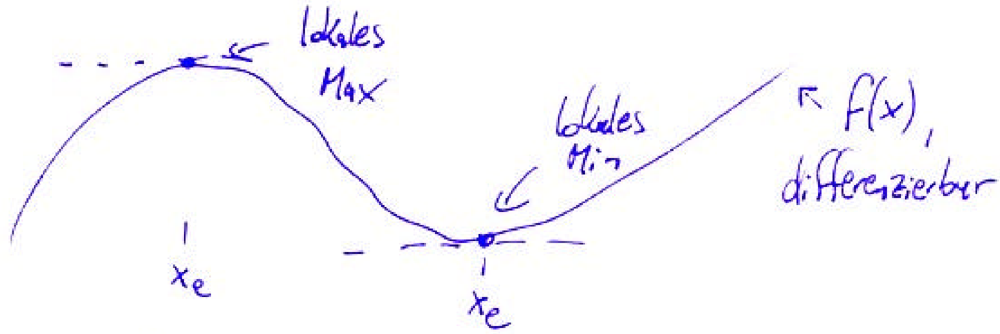
Beantworten kann man die Frage durch Integrieren → dazu kommen wir später!!)

Kompliziertere Beziehungen zwischen verschiedenen Ableitungen werden durch „Differentialgleichungen" beschrieben → Nächstes Semester!

Höhere Ableitungen liefern oft zusätzliche, wichtige Informationen!

Anwendung 1: Kurvendiskussion!

Betrachte:



Wir haben gesehen:

x_e lokales Extremum von $f(x)$

$\rightarrow \quad f'(x_e) = 0$

Wie unterscheidet man Maximum und Minimum?

Wenn die Funktion links vom ~~[illegible]~~ Extremum wächst und rechts fällt, dann muss ein Maximum vorliegen.

Das ist der Fall, wenn $f'(x_e)$ einen Vorzeichenwechsel von „+" nach „-" hat, also z.B. (!) wenn $f'(x_e)$ streng monoton fällt. d.h. die Ableitung von $f'(x_e)$ negativ ist.

Also:

Cartesische Vorzeichenregel

(a) Ist f in x_e zweimal differenzierbar und gilt

$$f'(x_e) = 0$$
$$f''(x_e) < 0 ,$$

dann ist x_e strenges lokales Maximum.

(b) Gilt entsprechend

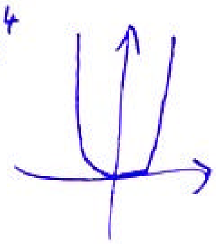
$$f'(x_e) = 0$$
$$f''(x_e) > 0 ,$$

dann ist x_e strenges lokales Minimum.

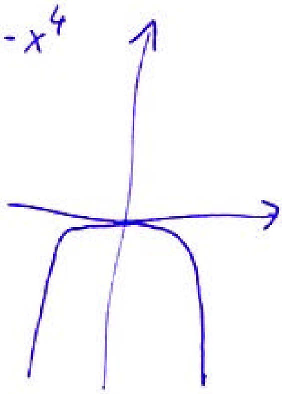
ACHTUNG!

Die Umkehrung gilt nicht:
Man kann auch ein (strenges) lokales Minimum oder Maximum haben, ohne dass $f''(x_e) > 0$ oder $f''(x_e) < 0$ ist

Beispiel dazu: $f(x) = x^4$



$f(x) = -x^4$



Die Vorzeichenregel ist also „hinreichend",
aber nicht „notwendig"!

Anwendung 2: Abschätzung von Funktionen mit höheren Ableitungen → Satz von Taylor

(Deutlich komplizierter als Anwendung 1, aber **EXTREM WICHTIG** für Anwendungen verschiedenster Art !!!)

Motivation:

Wir hatten gesehen, dass der Fehler von

$$f(x_0+h)$$

bei Abschätzung durch

$$f(x_0) + h \cdot f'(x_0)$$

für kleine h nicht allzu groß ist:

(Entwicklung 1. Ordnung) $$f(x_0+h) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0) + r(h)$$

mit $\lim\limits_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$

oder auch

(MWS) $$f(x_0+h) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0+\vartheta h) \quad \text{mit } \vartheta \in \left]0,1\right[.$$

Warum nicht „einfach" etwas genauer werden, indem man auch noch die Änderung von f' berücksichtigt ?!

(Denn: Wenn f' sich nicht allzu sehr ändert, dann wird $f'(x_0 + \vartheta h)$ bei Variieren von ϑ keine zu großen Sprünge machen und die Entwicklung 1. Ordnung hat keinen allzu großen Fehler!)

Konsequent durchgedacht führt diese Überlegung zum

$$\boxed{\text{SATZ von TAYLOR}}$$

– einem der mit Abstand wichtigsten Sachverhalte aus der Analysis.

Merke: Wer den Satz von Taylor mit seinen Voraussetzungen und Hintergründen (Grenzwerte, Differenzieren, Aussagen über Ableitungen) und Konsequenzen verstehen und ~~[illegible]~~ anwenden kann, der kennt zwar noch nicht die ganze Differentialrechnung, sollte aber keine Schwierigkeiten mit dem Rest haben.

~~(Wer keine Ahnung hat~~

(Wer keine Ahnung hat, worum es bei dem Satz geht, kann zwar versuchen, sich „durchzumogeln", wird aber später in der Praxis noch manche böse Überraschung erleben!)

<u>Also:</u> Überlegungen zur Entwicklung 1. Ordnung

Betrachten wir einen Bezugspunkt x_0 und einen beliebigen aber festen Punkt x; $\Big\} \; (x-x_0) = h$

dann haben wir also

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \underline{r(x-x_0)} \rightarrow \text{genauer zu untersuchen!}$$

Für $x \neq x_0$ gibt es genau ein ρ mit

$$r(x-x_0) = \frac{(x-x_0)^2}{2}\rho$$

(denn $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2}\rho$

liefert die eindeutige Lösung

$$\rho = \frac{2}{(x-x_0)^2}\Big(f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)\Big) \quad !)$$

<u>Ziel:</u> Aussage über ρ!

Betrachte für $t \in [x_0, x]$ die Hilfsfunktion

$$g(t) := f(x) - \left(f(t) + f'(t)(x-t)\right) - \frac{(x-t)^2}{2}\varrho .$$

Man sieht durch Einsetzen:

$$g(x) = 0 \qquad \text{(deshalb ist } g \text{ so gewählt!)}$$

$$g(x_0) = 0 \qquad \text{(deshalb war } \varrho \text{ so gewählt!)}$$

Damit ist die durchschnittliche Steigung der Funktion g über dem Intervall $]x_0, x[$:

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = 0 .$$

Nach Mittelwertsatz gibt es ein Stelle $\xi \in]x_0, x[$, an der die Steigung der durchschnittlichen Steigung entspricht. Also:

$$g'(\xi) = 0 \qquad \text{mit } \xi \in]x_0, x[$$

Jetzt betrachte $g'(t)$:

Nach t (!!) abgeleitet also:

$$g'(t) = 0 - f'(t) - \left(f'(t)(x-t)\right)' - \left(\frac{(x-t)^2}{2}\rho\right)'$$

$$= -f'(t) - \left(f''(t)(x-t) + f'(t)\cdot(-1)\right) - \left((-1)\cdot\frac{2(x-t)}{2}\cdot\rho\right)$$

$$= -f'(t) - f''(t)(x-t) + f'(t) + (x-t)\cdot\rho$$

$$= (x-t)\left(\rho - f''(t)\right).$$

Also ist für $t=\xi$:

$$g'(\xi) = (x-\xi)\left(\rho - f''(\xi)\right)$$

$$= 0,$$

also (beachte $\xi \neq x$!)

$$\boxed{\rho = f''(\xi)}.$$

<u>AHA!</u>

Satz von Taylor 1. Ordnung

Sei $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar auf $[x_0, x] \subseteq X$.

Dann gibt es ein $\xi \in \,]x_0, x[$ mit

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(\xi)\frac{(x-x_0)^2}{2}}$$

Den Ausdruck $f''(\xi)\frac{(x-x_0)^2}{2}$ nennt man „Restglied".
(Es gibt einige relativ ähnliche Formen davon, dieses ist das „Lagrangesche Restglied".)

Ein bisschen (nicht sehr viel!) allgemeiner rechnet man nach, dass man noch allgemeiner herleiten kann:

Satz von Taylor n-ter Ordnung

Sei $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbar auf $[x_0, x] \subseteq X$.

Dann gibt es ein $\xi \in \,]x_0, x[$ mit

(nächste Seite)

$$\cancel{f(x) = f(x_0) + f'(x)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2} + \ldots + f^{(k)}(x_0)\frac{(x-x_0)^k}{k!} + \ldots}$$

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots + f^{(k)}(x_0)\frac{(x-x_0)^k}{k!} + \dots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!} \\ &\qquad + f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x_0)\frac{(x-x_0)^k}{k!} + f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}}$$

Den Ausdruck

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x_0)\frac{(x-x_0)^k}{k!}$$

nennt man das <u>n-te Taylorpolynom</u>