

Differenzieren in Aktion

(94)

18.12.02

Eine der wichtigsten Differentiationsregeln:

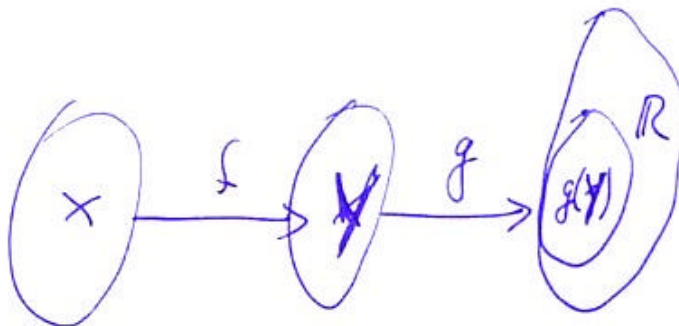
Kettenregel:

Betrachte

$$f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \cancel{Y} \subseteq \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x)$$

$$g: \cancel{Y} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$\cancel{y} \mapsto g(\cancel{y})$$

Also



(Typischerweise sind $X, \cancel{Y}$ Intervalle,
können aber auch Vereinigung von Intervallen sein!)

Sind

 f differenzierbar auf X g differenzierbar auf X' ,dann gilt für $x_0 \in X$

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Wieso?Wenn $f(x_0+h) = f(x_0)$ für eine ganze Folge $h \rightarrow 0$ ist,

ist auch

$$\frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{h} = \frac{0}{h} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h},$$

also auch

$$(g \circ f)'(x_0) = 0 = g'(f(x_0)) \cdot 0 = (g \circ f)'(x_0) \cdot f'(x_0)$$

Betrachtet man $f(x_0+h) \neq f(x_0)$, dann ist

$$\frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{h} = \frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{f(x_0+h) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Setzt man

$$y_0 = f(x_0)$$

und $y_0 + k = f(x_0 + h)$,

so geht wegen $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) \rightarrow f(x_0)$ also

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(x_0 + h)) - g(f(x_0))}{f(x_0 + h) - f(x_0)} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{g(y_0 + k) - g(y_0)}{k} = g'(y_0) = g'(f(x_0)) , \end{aligned}$$

also

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(x_0 + h)) - g(f(x_0))}{h} = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) .$$

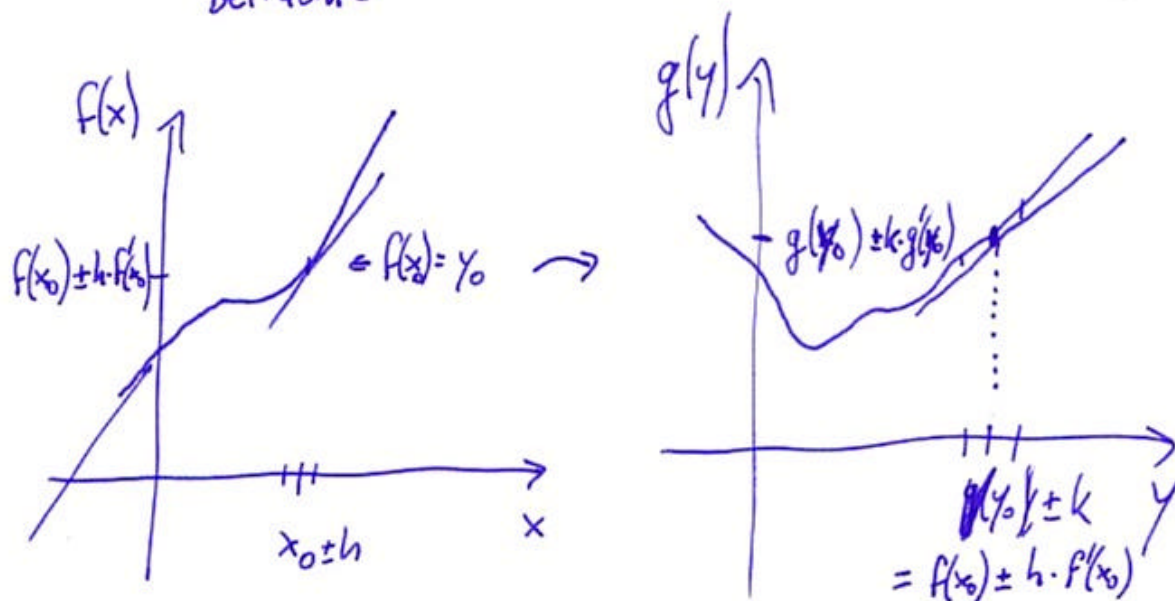
Kurzform als Merkregel:

$$(g \circ f)' = g'(f) \cdot f'$$

Anwendung und Interpretation:

Fehleranalyse:

Betrachte



Ein Fehler um h in x_0 verstärkt sich
 ungefähr (!) um einen Faktor $f'(x_0)$ im
 Argument von g , also ist der Gesamtfehler
 angenähert durch

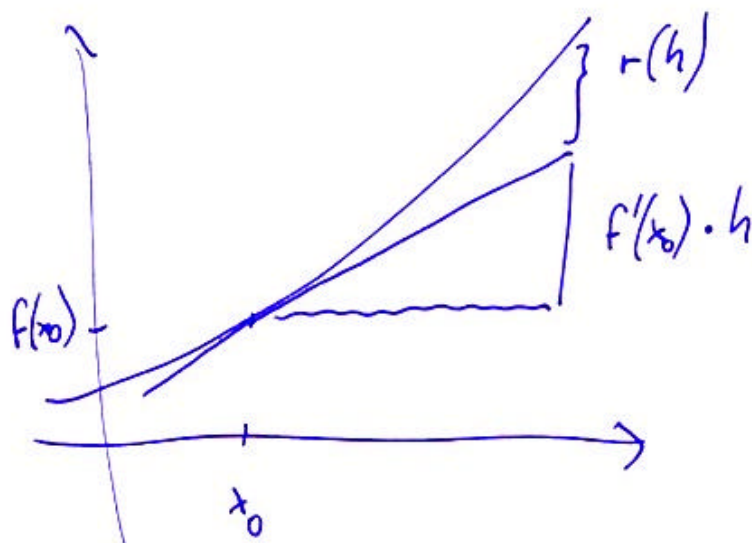
$$g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Fehlerabschätzung etwas genauer:

Nehmen wir an, wir kennen $f(x_0)$
und $f'(x_0)$

Gesucht: Abschätzung für $f(x_0+h)$!

Bild:



Mit
$$g(h) := \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0)$$

ist
$$\lim_{h \rightarrow 0} g(h) = 0.$$

Also ist für $r(h) = h \cdot g(h)$:

$$r(h) = f(x_0+h) - f(x_0) - h \cdot f'(x_0),$$

d.h.

$$f(x_0+h) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0) + r(h)$$

mit
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0$$

d.h. der Fehler
geht „superlinear“ gegen 0!

(98)

Anwendung: Grenzwerte vom Typ $\frac{0}{0}$!

Aufgabe: Betrachte $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$

Schwierigkeit: $\lim_{h \rightarrow 0} f(x) = 0$ und $\lim_{h \rightarrow 0} g(x) = 0$!

Mögliche Lösung: Sind f und g in 0 differenzierbar, dann schreibt man

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0) + h \cdot f'(0) + r_1(h)}{g(0) + h \cdot g'(0) + r_2(h)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot f'(0) + h \frac{r_1(h)}{h}}{h \cdot g'(0) + h \frac{r_2(h)}{h}}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(0) + \frac{r_1(h)}{h}}{g'(0) + \frac{r_2(h)}{h}}$$

mit $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_1(h)}{h} = 0$ und $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_2(h)}{h} = 0$,

Wenn $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(0)}{g'(0)}$ existiert, ist also

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{Regel von de l'Hospital}$$

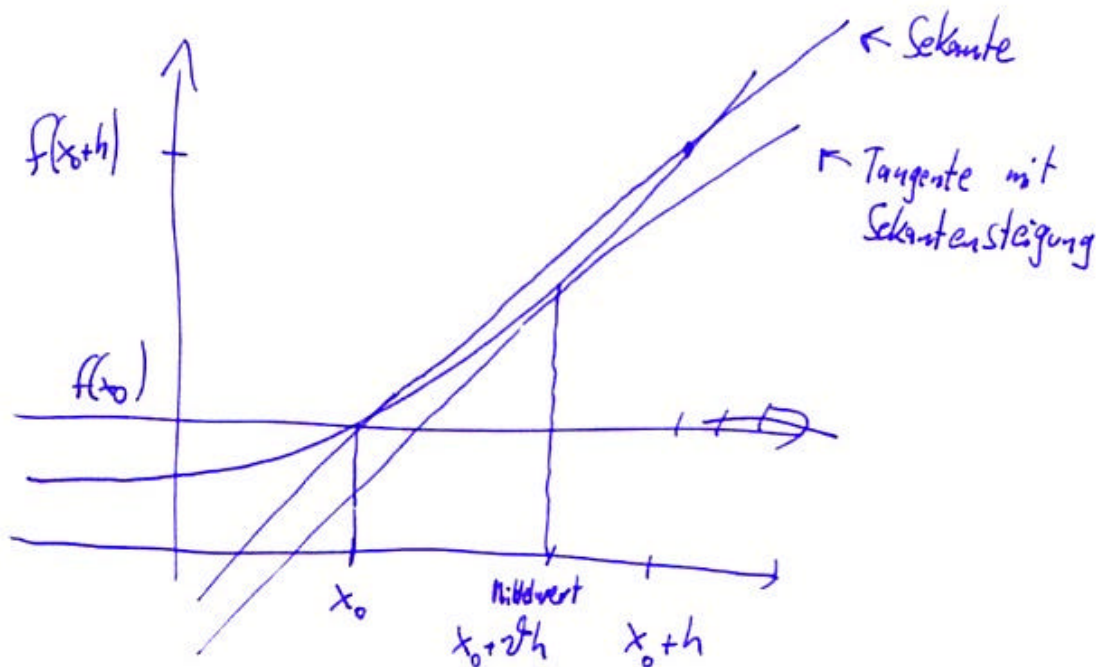
Fehlerabschätzung noch genauer?

→ Weitere Hilfsmittel! (Höhere Ableitungen → Freitag!)

Zunächst noch einige andere Aussagen und Hilfsmittel:

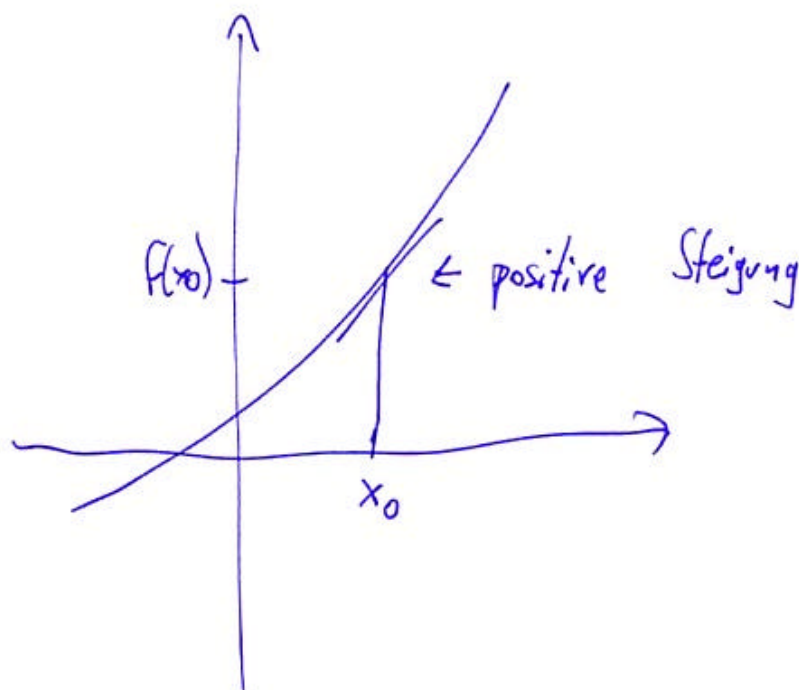
Mittelwertsatz der Differentialrechnung:

Bild:



Also
$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0 + \vartheta \cdot h) \quad \text{mit } \vartheta \in]0, 1[$$

Lokales Steigungsverhalten:



Ist die Steigung $f'(x_0)$ in x_0 positiv,
dann ist die Funktion (zumindest in
einer kleinen Umgebung von x_0)
streng monoton wachsend

(Denn es muss $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} > 0$ für kleine h ,

also $f(x_0+h) > f(x_0)$ für h positiv
 $f(x_0) > f(x_0+h)$ für h negativ sein!)

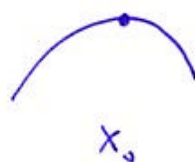
Entsprechend für $f'(x_0) < 0$:
streng monoton fallend!

Lokal

Folgerung 1: Lokale Minima und Maxima

x_0 heißt lokales Minimum oder Maximum, wenn kein Wert in der Nähe von x_0 kleiner oder größer ist.

Bild:



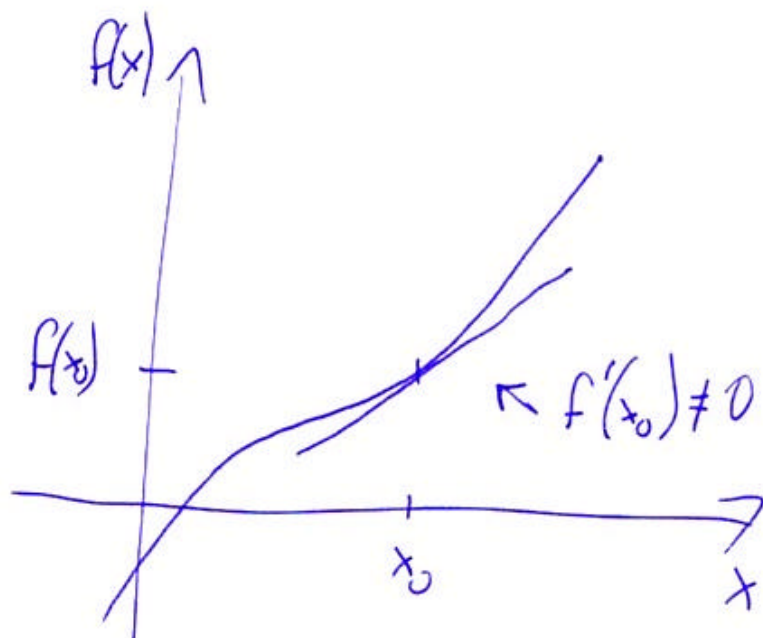
Also:

Ist x_0 lokales Extremum einer ^{stetig} differenzierbaren Funktion, dann MUSS $f'(x_0) = 0$ sein.

(Sonst wäre f streng monoton wachsend oder fallend!)

Noch genauere Aussage mit 2. Ableitung $\Rightarrow$ Freitag!

Folgerung 2: Lokale Umkehrbarkeit



f wächst streng monoton in der Nähe von x_0
(oder fällt)

$\Rightarrow$ Zu jedem ~~y~~ y in der Nähe von $f(x_0)$
gibt es genau ein x mit $f(x) = y$.

Das ist also die Umkehrfunktion von $f(x)$:

Sie liefert zu jedem y das x mit $f(x) = y$.

Man schreibt $f^{-1}(y) = x$.

f^{-1} ist also der „Schlüssel“ zum Lösen
der Gleichung $f(x) = y$!

Manchmal kann man die Umkehrfunktion explizit angeben, z.B. ist für

$f(x) = y$	$f^{-1}(y) = x$
x	y
$x+b$	$y-b$
$ax+b$	$\frac{1}{a}y - \frac{b}{a}$
$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{y}$
e^x	$\ln y$
$\sin x$	$\arcsin y$
x^2	$\sqrt{y}$

- auf jeweils geeigneten (!) Teilmengen der reellen Zahlen

Die Bedeutung von Folgerung 2 ist also:

Für eine ~~stetig~~ differenzierbare Funktion f mit $f'(x_0) \neq 0$ gibt es eine Umkehrfunktion in der Nähe von x_0 !

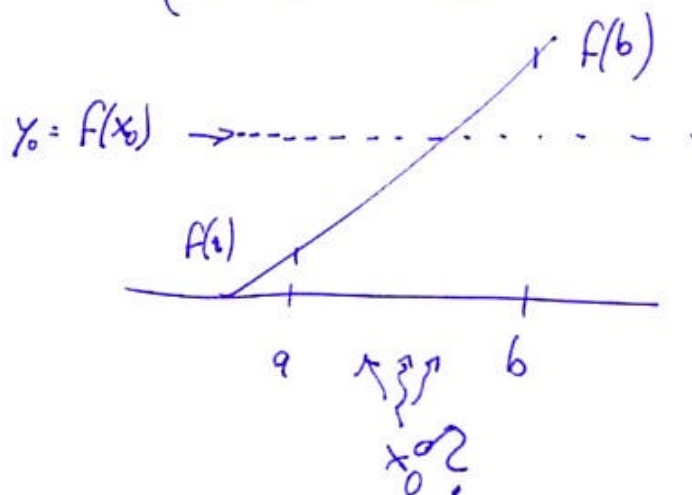
Außerdem gilt für die Umkehrfunktion:

$$\begin{aligned}
 f^{-1}(y_0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(y_0+k) - f^{-1}(y_0)}{(y_0+k) - y_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0+h) - x_0}{f(x_0+h) - f(x_0)} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{f(x_0+h) - f(x_0)} \\
 &= \frac{1}{f'(x_0)}
 \end{aligned}$$

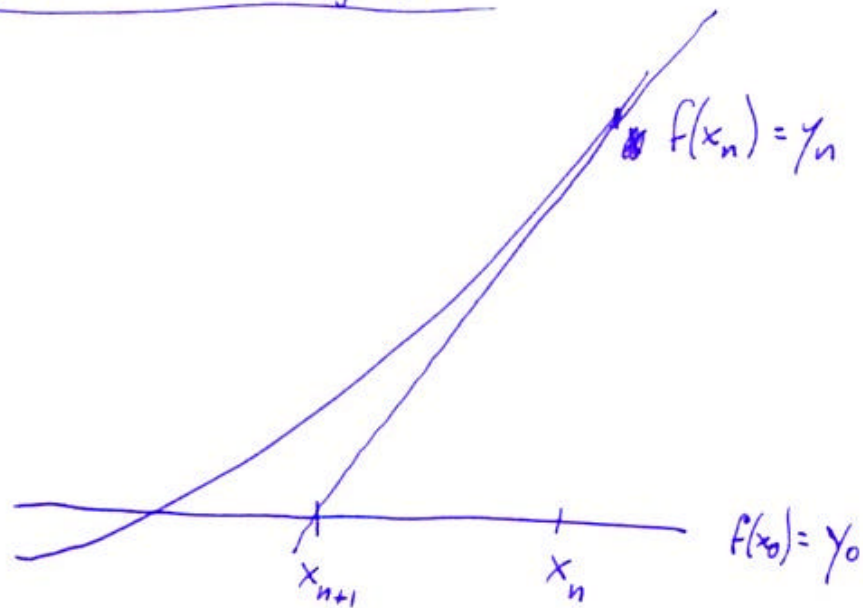
Merksatz: $\boxed{f^{-1} = \frac{1}{f'}}$

Praktisches Verfahren zur Berechnung eines Wertes der Umkehrfunktion ($\hat{=}$ Lösen einer Gleichung!):

Möglichkeit 0: Intervallhalbierung - wie gesehen
(Für str. monotone Funktionen mit eindeutiger Lösung!)



Möglichkeit 1: Etwas genauer!



$$f(x_0) + \frac{x_n - x_{n+1}}{f'(x_n)} \cdot f'(x_n)$$

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_{n+1}} = f'(x_n)$$

also

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) - f(x_0)}{f'(x_n)}$$

Das ist das sogenannte Newton-Verfahren.

Unter bestimmten mathematischen Bedingungen liefert das sehr schnell gute Näherungslösungen.