Daher gilt:

(1) Ist $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, dann ist

$$\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \varphi(\vec{x}) = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

eine lineare Abbildung.

(2) Für jede lineare Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

gibt es eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit

$$\varphi(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}.$$

Dabei sind die Spalten von A die Bilder der Einheitsvektoren:

$$A = \left(\varphi(\vec{e}_1) \; \cdots \; \varphi(\vec{e}_n) \right)$$

Also gibt es viele weitere Beispiele:

(c) $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \varphi(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 \quad\quad + x_3 \end{pmatrix}$$

(d) $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \varphi(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 2x_2 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_2 \end{pmatrix}$$

Wichtige Fragen zu Abbildungen:

(1) Welche Objekte der Bildmenge sind als Bilder darstellbar?

(2) Wie sieht ein Urbild x zu einem Zielvektor b aus, der darstellbar ist?

(3) Wann gibt es genau ein Urbild und damit eine Umkehrabbildung?

(4) Wie bestimmt man eine Umkehrabbildung?

LA
90

(1) Man nennt die Menge der Bilder einer Abbildung „Bild von φ"

bzw. „Bild von A"

und schreibt

$$\text{Bild}(\varphi), \quad \text{Bild}(A)$$

oder auch $\quad \text{Im}(\varphi), \quad \text{Im}(A)$

Image is everything!

Es geht um die Lösbarkeit des Gleichungssystems

$$(*) \qquad Ax = b.$$

Dazu wissen wir schon:

$$(*) \text{ lösbar} \iff \text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|b)$$

– oder anders gesagt:

b muss linear abhängig sein von den Spalten von A!

~~Also bekannt von oben~~

Damit ist

$\operatorname{Im} A =$ Menge der Linear-Kombinationen der Spalten von A.

Dafür reicht es offenbar, eine Basis zu nehmen – also eine möglichst große Menge von linear unabhängigen Spalten!

Beispiel:

$$\operatorname{Im}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 4 & 1\end{pmatrix} = \operatorname{Im}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\\ 3 & 4\end{pmatrix}$$

(denn $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ ist linear abhängig von den anderen beiden!)

$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$ sind linear unabhängig, denn

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0\\ 2x_1 + 3x_2 &= 0\\ 3x_1 + 4x_2 &= 0 \end{aligned}$$

hat die eindeutige Lösung $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

Die Menge der Linearkombination von

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$$

hat Dimension 2, ist also nicht der ganze Zielraum (der hat Dimension 3).

– Man sagt

$$\operatorname{Im} A = \left\{ b \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; b = x_1 \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix},\ x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

ist der von $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$ aufgespannte Raum.

(Also: $\operatorname{Im}(A) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} \right\}$.)

– Man erhält $\operatorname{Im}(A)$ als $\operatorname{span}\{a_1, \dots, a_k\}$, wobei $a_1, \dots, a_k$ eine maximale lineare unabhängige Menge von Spalten in A ist.

(Man sagt auch: $\{a_1, \dots, a_k\}$ ist eine Basis von $\operatorname{Im}(A)$!)

Man beobachtet:

(a) Eine Menge $\operatorname{span}\{a_1, \dots, a_k\} \subseteq \mathbb{R}^m$ erfüllt alle Bedingungen an einen Vektorraum.
(klar, denn die werden „vererbt", weil sie im $\mathbb{R}^m$ gelten!)

(b) Für b_1 und $b_2 \in \operatorname{span}\{a_1, \dots, a_k\}$ ist auch (*) $b_1 + b_2 \in \operatorname{span}\{a_1, \dots, a_k\}$

(denn mit
$$b_1 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i$$
und
$$b_2 = \sum_{i=1}^{k} \mu_i a_i$$
ist
$$(b_1 + b_2) = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i + \mu_i) a_i ,$$
also wieder eine Linearkombination!)

und für $c \in \mathbb{R}$ auch

(**) $c \cdot b_1 \in \operatorname{span}\{a_1, \dots, a_k\}$

(denn mit $b_1 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i$
ist $c b_1 = \sum_{i=1}^{k} (c \cdot \lambda_i) a_i$.)

9 LA

Eine Teilmenge W eines $\mathbb{R}$-Vektorraumes V nennt man <u>Unterraum</u> (oder Untervektorraum), wenn sie

(*) $w_1, w_2 \in W \Rightarrow w_1 + w_2 \in W$

(**) $c \in \mathbb{R}, w_1 \in W \Rightarrow c w_1 \in W$.

(2) Man betrachtet die Lösungsmenge von

$$A x = b.$$

Hat man eine Lösung $\bar{x}$ gefunden, dann erfüllt jede andere Lösung $\hat{x}$ ebenfalls

$$A \hat{x} = b$$

wie

$$A \bar{x} = b$$

also

$$A(\bar{x} - \hat{x}) = 0$$

Also gilt:
Die Lösungsmenge von

Also gilt:

Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ einer linearen Gleichung $Ax=b$ erfüllt

$$\mathbb{L} = \left\{ v \in \mathbb{R}^m \,\middle|\, v = x_b + x_0 \text{ mit } Ax_0 = 0 \right\},$$

wobei x_b irgendeine Lösung von $Ax=b$ ist

Man interessiert sich also besonders für die Menge

$$ke(A) := \left\{ x_0 \in \mathbb{R}^m \,\middle|\, Ax_0 = 0 \right\},$$

den „Kern" von A und schreibt auch

$$\mathbb{L} = x_b + ke(A).$$

Auch $ke(A)$ ist ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^m$, und es gilt

$$\underbrace{\dim\left(Im(A)\right)}_{\substack{\text{Maximalzahl} \\ \text{linear unabhängiger} \\ \text{Spalten}}} + \underbrace{\dim\left(ke(A)\right)}_{\substack{\text{Rest ist} \\ \text{linear abhängig}}} = \underbrace{m}_{\substack{\text{Zahl} \\ \text{der} \\ \text{Spalten}}}.$$

95 LA

(3) Genau eine Lösung gibt es, wenn der Kern nur den Nullvektor enthält (sonst gibt es mehr als eine Lösung) und jeder Vektor darstellbar ist (damit es überhaupt eine Lösung gibt).

Also muss

$m =$ Zahl der Spalten $=$ Dimension des Bildraumes $= n$

sein und alle Spalten müssen linear unabhängig sein.

Also ist

A quadratisch

und $\det A \neq 0$ (damit die Spalten linear unabhängig sind).

95 a

(3) Genau eine Lösung gibt es, wenn der Kern nur den Nullvektor enthält (sonst gibt es mehr als eine Lösung) und jeder Vektor darstellbar ist (damit es überhaupt eine Lösung gibt).

Also muss

$m =$ Zahl der Spalten = Dimension des Bildraumes $= n$

sein und alle Spalten müssen linear unabhängig sein.

Also ist

A quadratisch

und $\det A \neq 0$ (damit die Spalten linear unabhängig sind).

98 LA

(4) Es muss ganz einfach A^{-1} betrachtet werden, denn es gilt

$$A^{-1}(A\cdot x) = (A^{-1}A)\cdot x = E_n \cdot x = x,$$

d.h. die Abbildung, ~~zur A~~ die zur Matrix A^{-1} gehört, bildet

$$Ax$$

wieder auf x

ab!

Koordinatentransformationen und Basiswechsel

Betrachtet man einen Vektor $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^n$,

dann gibt jede Komponente v_i an, das Wievielfache des i-ten Einheitsvektors $\vec{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ← i-te Stelle

man aufaddieren muss, d.h.

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{e}_i \,.$$

Will man statt dessen eine andere Basis $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ verwenden, um die Vektoren darzustellen, geht es also um

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{a}_i$$

– also um das Gleichungssystem

$$A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = v \,.$$

Man sieht:

Bezüglich der neuen Basis hat v die Darstellung

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = A^{-1} v .$$

Umgekehrt entspricht der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \leftarrow i =: \vec{e}_i{}'$

bezüglich der neuen Basis (oder in „neuen Koordinaten")

dem Vektor $\vec{a}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$ in alten Koordinaten,

d.h. die Berechnung ist

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} .$$

100 LA

Betrachtet man nun eine lineare Abbildung φ mit Matrix B bezüglich alter Koordinaten, dann muss man zum Ausdrücken bezüglich neuer Koordinaten:

(1) die neuen in alte Koordinaten verwandeln,

(2) die Abbildung ausführen

(3) die alten in neue Koordinaten zurückverwandeln.

Also gilt:

Beschreibt B eine lineare Abbildung bezüglich Basis $\mathcal{B}_1 = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ und ist $\mathcal{B}_2 = \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ eine zweite Basis des $\mathbb{R}^n$, so wird die Abbildung bezüglich der Basis $\mathcal{B}_2$ durch die Matrix

$$B' = A^{-1} B A$$

beschrieben, wobei $A = (\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n)$ die aus den Spaltenvektoren $\vec{a}_i$ bestehende Matrix ist.