Determinanten

(a) Wann ist ein lineares Gleichungssystem eindeutig lösbar?

Betrachte:

$$a_{11} x + a_{12} y = b_1$$
$$a_{21} x + a_{22} y = b_2$$

Eliminiere a_{21}:

$$a_{11} x + a_{12} y = b_1$$
$$0 + (a_{22} a_{11} - a_{21} a_{12}) y = b_2 a_{11} - a_{21} b_1$$

Also wichtig:

Die Größe $a_{22} a_{11} - a_{21} a_{12} =: D$

Falls $D \neq 0$ ist, erhalten wir die Lösungen

$$x = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{D}$$

$$y = \frac{b_2 a_{11} - a_{21} b_1}{D}.$$

Deshalb nennt man D auch die „Determinante" („Bestimmende") der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

und schreibt

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} .$$

(b) In der nächsten Verallgemeinerung für 3×3-Systeme zeigt sich, dass das System eindeutig lösbar ist, wenn

$$D = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ ist} .$$

Man rechnet nach, dass

$$D = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

ist,

also durch „Entwicklung" der 3x3-Determinante nach der ersten Spalte entsteht.
Das Vorzeichen richtet sich dabei danach, ob die Indexsumme $i+j$ gerade oder ungerade ist.

Nur noch für 3x3-Determinanten gibt es eine relativ einfache Rechenregel - die Regel von Sarrus:

$$\det A = \left|\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right| \begin{array}{cc} (a_{11}) & (a_{12}) \\ (a_{21}) & (a_{22}) \\ (a_{31}) & (a_{32}) \end{array}$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}$$
$$- a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}$$

(c) Ganz allgemein erhält man Determinanten „rekursiv", d.h. schrittweise von kleineren zu größeren Dimensionen, so wie von Dimension 2 auf Dimension 3:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \det A_{11} + a_{21} \cdot \det A_{21} + a_{31} \cdot \det A_{31},$$

wobei A_{ij} die durch Streichen von Zeile i und Spalte j entstandene Matrix ist.

Dann ist

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \qquad \left(\text{Entwicklung nach } i\text{-ter Zeile}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \qquad \left(\text{Entwicklung nach } j\text{-ter Spalte}\right)$$

Determinanten erfüllen die folgenden Rechenregeln:

1. Die Determinante ändert ihren Wert nicht, wenn man zu einer Zeile das Vielfache einer anderen Zeile addiert.
2. Vertauscht man zwei Zeilen, ändert die Determinante ihr Vorzeichen
3. Es gilt $\det(c \cdot A) = c^n \cdot \det A$.

Vor allem Rechenregel 1 erlaubt das effektivere Berechnen von Determinanten - das ist ja auch gerade, was wir bei Gleichungssystemen gemacht haben!

<u>Beobachtung:</u>
Kann man durch 1 eine Nullzeile erzeugen, ist die Determinante Null - also ein zugehöriges Gleichungssystem nicht eindeutig lösbar.

<u>Anders gesagt:</u>
Eine Determinante ist Null, wenn die Matrix aus linear abhängigen Vektoren besteht.

Beispiel für Determinantenberechnung:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

(a) Mit Sarrus:

$$1\cdot1\cdot1 + 2\cdot1\cdot1 + 3\cdot1\cdot0 - 1\cdot1\cdot3 - 1\cdot1\cdot2 - 0\cdot1\cdot1$$

$$= 1 + 2 + 0 - 3 - 2 - 0$$

$$= -2$$

(b) Mit Entwicklung nach Spalte 1:

$$1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1\cdot1 - 1\cdot2 + 1\cdot(2-3)$$

$$= 1 - 2 - 1$$

$$= -2$$

(c) Mit Zeilenumformung und Entwicklung:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{Nach Regel ①:} \\ \text{zweite Zeile} \\ \text{zweimal von} \\ \text{erster abziehen}}}{=} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{Entwicklung} \\ \text{nach} \\ \text{zweiter} \\ \text{Spalte}}}{=} 1\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

Noch etwas mehr zu Determinanten und Gleichungssystemen:

Für

$$a_{11} x + a_{12} y = b_1$$
$$a_{21} x + a_{22} y = b_2$$

ergeben sich unter der Voraussetzung $\det A \neq 0$ die Lösungen

$$x = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{\det A}$$

$$y = \frac{b_2 a_{11} - a_{21} b_1}{\det A}$$

Beachte

$$b_1 a_{22} - a_{12} b_2 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

und

$$b_2 a_{11} - a_{21} b_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Also

$$x = \frac{\det A_b^{(1)}}{\det A}$$

$$y = \frac{\det A_b^{(2)}}{\det A}$$

wobei $A_b^{(i)}$

die Matrix ist, in der die i-te Spalte durch b ersetzt wurde.

Das gilt auch ganz allgemein:

Cramersche Regel

Das Gleichungssystem

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b$$

hat unter der Voraussetzung

$$\det A \neq 0$$

genau die Lösungen

$$x_i = \frac{\det A_b^{(i)}}{\det A}$$

Verallgemeinerung auf simultanes Lösen von Gleichungssystemen:

Wann gibt es eine Matrix X mit

$$A \cdot X = B \;?$$

↳ hängt nur von A ab, genauer: von $\det A$!

Speziell von Interesse:

Eine Matrix X mit

$$A \cdot X = E_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

nennt man „inverse Matrix" von A

und man schreibt

$$X = A^{-1}.$$

Beobachtung:

Eine $n\times n$-Matrix A hat genau dann eine Inverse, wenn $\det A \neq 0$ ist!

Berechnung:

Simultanes Lösen der Gleichungen!

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Umformungen durch Zeilenadditionen …

… werden hier mitgemacht!

Lineare Abbildungen

Betrachte eine Abbildung φ zwischen zwei $\mathbb{R}$-Vektorräumen V und W (z.B. $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$), die folgende beiden Eigenschaften erfüllt:

$$\varphi : V \to W \quad \text{mit}$$

(1) $\varphi(\vec{x} + \vec{y}) = \varphi(\vec{x}) + \varphi(\vec{y})$ (linear)

(2) $\varphi(a \cdot \vec{x}) = a \cdot \varphi(\vec{x})$.

So eine Abbildung nennt man linear!

Beispiele:

(a) $$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto c \cdot x$$

ist linear, denn

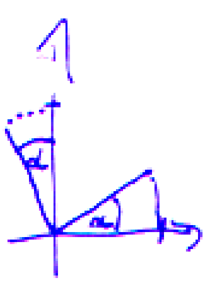
(1) $f(x+y) = c \cdot (x+y) = c \cdot x + c \cdot y = f(x) + f(y)$

(2) $f(q \cdot x) = c \cdot q \cdot x = q \cdot f(x)$

(b) Eine Drehung um den Ursprung in Zweidimensionalen:

Sei der Drehvektor α.

Dann wird



$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ abgebildet auf $\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ abgebildet auf $\begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$

Und allgemein

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ abgebildet auf $\begin{pmatrix} x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{pmatrix}$

Wir können also auch schreiben:

$$\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ganz allgemein wird eine lineare Abbildung bestimmt durch die Bilder einer Basis:

Ist $v_1, \dots, v_n$ eine Basis

und $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$, so ist

$$\varphi(v) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(v_i) .$$

Man kann also eine lineare Abbildung durch eine Matrix beschreiben, die als Spalten die Bilder der Einheitsvektoren hat.