

$$\cosh = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Damit:

$f(x)$	$f'(x)$	$T_{\infty}(x)$	Konvergenzbereich
$\sinh x$	$\cosh x$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$	$x \in \mathbb{R}$
$\cosh x$	$\sinh x$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$	$x \in \mathbb{R}$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$	(kompliziert)	$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$
$\coth x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}$	(kompliziert)	$0 < x < \pi$
$\operatorname{arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$		$-1 < x < 1$
$\operatorname{arcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$		$x > 1$
$\operatorname{artanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$	$-1 < x < 1$
$\operatorname{arcoth} x$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)x^{2k+1}}$	$x > 1$

Rechnen mit Potenzreihen

Taylor'sche Reihen haben wie gesehen die Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k.$$

Objekte der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots$$

nennt man Potenzreihen. Potenzreihen sind also so etwas wie verallgemeinerte Polynome!

Wir werden sehen, dass man mit diesen Objekten ganz ähnlich rechnen kann wie mit Polynomen.

Dabei müssen wir „nur“ darauf achten, dass die ganze Sache noch sinnvoll ist - also dass alles noch konvergiert.

Damit wollen wir uns zuerst beschäftigen!

(I) Konvergenzatz für Potenzreihen

(a) Der Konvergenzbereich einer Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$$

ist ein zusammenhängendes Intervall, das symmetrisch um x_0 liegt:

Es gibt ein r (der „Konvergenzradius“), so dass die Reihe

konvergiert	für $ x-x_0 < r$
divergiert	für $ x-x_0 > r$

(b) Sind alle bis auf endliche viele Koeffizienten a_k von Null verschieden, so ist der Konvergenzradius

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|,$$

falls der Grenzwert existiert.

(II) Additions- und Subtraktionsatz für Potenzreihen

Betrachte zwei Potenzreihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-x_0)^k$$

mit Konvergenzradien r_a und r_b .

Dann ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k \pm \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \pm b_k) (x-x_0)^k$$

zumindest mit Konvergenzradius $\min(r_a, r_b)$
(eventuell noch mehr).

(III)

Differenzierbarkeitssatz für Potenzreihen

Die Funktion

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$$

ist auf dem ganzen Konvergenzintervall beliebig oft differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (x-x_0)^k$$

$$f''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} (x-x_0)^k$$

und allgemein

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (n+k) \cdot (n+k-1) \cdots (k+1) a_{n+k} (x-x_0)^k.$$

(IV) Identitätssatz für Potenzreihen

Stimmen die Funktionen

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k \quad \text{mit Konvergenzradius } r_a$$

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-x_0)^k \quad \text{mit Konvergenzradius } r_b$$

auf dem gemeinsamen Konvergenzintervall $\min(r_a, r_b)$

übereinstimmen für eine ganze Folge

$$x_1, x_2, x_3, \dots \neq x_0,$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = x_0 \quad \text{übereinstimmen,}$$

dann gilt

$$f(x) = g(x)$$

für alle x aus dem Konvergenzintervall

und $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(V) Produktsatz für Potenzreihen

Sind

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-x_0)^k$$

Potenzreihen mit Konvergenzradien r_a und r_b .

Dann ist

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-x_0)^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots + a_k b_0) (x-x_0)^k$$

eine zumindest mit Konvergenzradius $\min(r_a, r_b)$
konvergente Reihe.