Abteilung für Mathematische Optimierung
TU Braunschweig

Prof. Dr. Sándor Fekete
Dr. Laura Heinrich-Litan

SS 2003

Diskrete Optimierung
Übung 11 vom 01.06.03

Abgabe der Aufgaben bis 15:00 Uhr am **Dienstag, 08.07.03** vor der großen Übung.

Aufgabe 1 (Inklusions-maximale Matchings):

Ein Matching M_0 in einem Graphen G heisst *inklusions-maximal*, falls es in G kein Matching M mit $M_0 \subset M$ gibt.

Sei G ein Graph und M_1, M_2 zwei inklusions-maximale Matchings in G. Zeige, dass $|M_1| \leq 2|M_2|$.

(10 Punkte)

Aufgabe 2 (Augmentierende Pfade):

Betrachte den Graphen G_1 mit Matching M_1 in Abbildung 1 und den Graphen G_2 mit Matching M_2 in Abbildung 2. Die Matchingkanten sind fett angezeichnet.

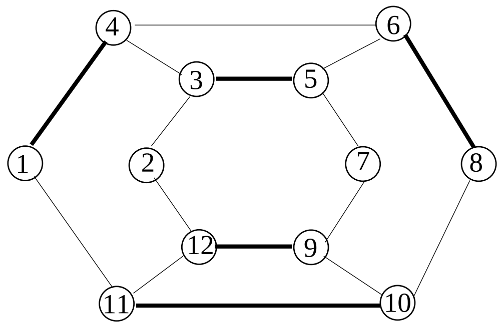

Abbildung 1: Graph G_1

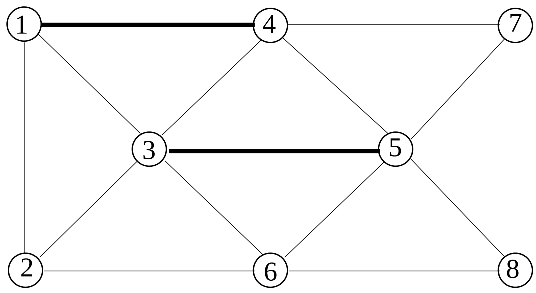

Abbildung 2: Graph G_2

Bestimme Matchings maximaler Grösse für jeweils G_1 und G_2 anhand von Verbesserungen der aktuellen Matchings durch augmentierende Pfade.

(10 Punkte)

Aufgabe 3 (Zerlegung in Matchings):

Ein Graph heisst *k-regulär*, wenn alle Knoten Grad k haben. Zeige, dass ein k-regulärer, bipartiter Graph sich in k kantendisjunkte perfekte Matchings zerlegen lässt.

(Tipp: verwende den Satz von Hall und Induktion.)

(20 Punkte)

Aufgabe 4 (Knotendisjunkte augmentierende Pfade):

Ein Matching N maximaler Grösse in einem Graphen G habe r Kanten. Betrachte nun ein Matching M mit $|M| = k \leq r$ Kanten.

Zeige, dass es für M mindestens $r-k$ paarweise knotendisjunkte augmentierende Pfade gibt.

(Tipp: Sei $A := N \setminus M$ und $B := M \setminus N$. Offenbar $N \Delta M = A \dot{\cup} B$ und $|A| - |B| = r - k$. Betrachte den Graphen $G' := (V, N \Delta M)$ und gehe wie beim Beweis des Satzes von Berge vor.)

(20 Punkte)